J.W. Goethe Universität
R. Neininger

WS 2022/23
Blatt 1

Übungen zu Stochastische Analyse von Algorithmen

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, welche der folgenden asymptotischen Aussagen wahr bzw. falsch sind. Es gelte jeweils $n \to \infty$.

(a) $n^2 = O(n \log^2 n)$ (b) $n \log^2 n = o(n^2)$ (c) $n \log_2 n = \Theta(n \log_{10} n)$

(d) $n^{1000} = \Omega(e^{\sqrt{n}})$ (e) $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sim \log n$ (f) $117n^2 + 15n - 8 = \Omega(n^2)$

(g) $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} = \Theta(1)$ (h) $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (i) $\sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j^3} \sim \frac{1}{3} n^{-2}$

Zeigen Sie ferner, dass für die Catalanschen Zahlen $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ für $n \to \infty$ gilt

$$C_n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi} n^{3/2}}.$$

Aufgabe 2. Betrachten Sie einen zufälligen binären Baum mit $n \geq 2$ Knoten (im Catalan Modell). Zeigen Sie, dass die Wurzel mit Wahrscheinlichkeit

$$\frac{n+1}{2n-1} \geq \frac{1}{2}$$

nur ein Kind hat.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Wurzel mit Wahrscheinlichkeit $(n+1)/(2(2n-1))$ kein linkes Kind hat. Zählen Sie dazu entsprechende einfache Irrfahrten ab.

Aufgabe 3. Zählen Sie die Anzahl binärer Bäume mit m Knoten ($m \in \mathbb{N}$ ungerade), die nur Knoten mit zwei Kindern oder Blätter haben.

Hinweis: Führen Sie dies auf ein Abzählproblem für gewöhnliche binäre Bäume zurück.

Aufgabe 4. In einem zufälligen binären Baum mit n Knoten (im Catalan Modell) seien LC_n, RC_n und BC_n die Anzahlen der Knoten mit genau einem linken Kind, genau einem rechten Kind, bzw. mit zwei Kindern. Zeigen Sie die Asymptotiken

$$\mathbb{E}[LC_n] \sim \frac{n}{4}, \quad \mathbb{E}[RC_n] \sim \frac{n}{4}, \quad \mathbb{E}[BC_n] \sim \frac{n}{4}.$$

Abgabe am Montag, den 7. November, vor der Vorlesung.

Bachmann–Landau Symbole:
Zur Beschreibung asymptotischer Größenordnungen sind folgende Schreibweisen gebräuchlich. Seien dazu $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ Folgen reeller Zahlen. Man schreibt:

$$\begin{aligned}
a_n = O(b_n) \text{ für } n \to \infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad \exists\, C > 0, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n| \leq C|b_n|.\\
a_n = \Omega(b_n) \text{ für } n \to \infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad \exists\, C > 0, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n| \geq C|b_n|.\\
a_n = \Theta(b_n) \text{ für } n \to \infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad \exists\, C_1, C_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : C_1|b_n| \leq |a_n| \leq C_2|b_n|.\\
a_n = o(b_n) \text{ für } n \to \infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.\\
a_n = \omega(b_n) \text{ für } n \to \infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0.\\
a_n \sim b_n \text{ für } n \to \infty \quad &:\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.
\end{aligned}$$

Man spricht die Symbole „a_n ist groß O von b_n für n gegen Unendlich“ und entsprechend, wobei der Zusatz $n \to \infty$ unterschlagen wird, falls aus dem Zusammenhang klar. Bei den Definitionen von klein o, klein ω und der asymptotischen Äquivalenz $\sim$ wird vorausgesetzt, dass fast alle Folgenglieder der Folge, die jeweils im Nenner auftritt, ungleich Null sind. Offenbar gilt $a_n = \Theta(b_n)$ genau dann, wenn $a_n = O(b_n)$ und $a_n = \Omega(b_n)$ gelten.

Die Verwendung des Gleichheitszeichens in Schreibweisen wie $a_n = \Omega(b_n)$ ist insofern unglücklich, als etwa aus $a_n = \Omega(b_n)$ und $d_n = \Omega(b_n)$ offensichtlich nicht die Gleichheit der Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(d_n)_{n\geq 1}$ folgt. Klarer, wenngleich ungebräuchlich, wäre die Schreibweise $(a_n)_{n\geq 1} \in O(b_n)$, wobei wir $O(b_n)$ als Menge aller Folgen $(f_n)_{n\geq 1}$ auffassen, zu denen es je eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass $|f_n| \leq C|b_n|$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Das Vinogradov-Symbol $\ll$ in der Schreibweise $a_n \ll b_n$ bedeutet $a_n = O(b_n)$.