J.W. GOETHE UNIVERSITÄT
R. Neininger

WS 2022/23
Probeklausur

Übungen zu Stochastische Analyse von Algorithmen

Aufgabe PK1. Geben Sie (mit Begründung) die Anzahl der

(a) einfachen Irrfahrten (b) einfachen, nichtnegativen Irrfahrten

von $(0, 6)$ nach $(2n, 4)$ an.

Aufgabe PK2. Es gelte $n \to \infty$. Kennzeichnen Sie wahre bzw. falsche Aussagen mit **W** bzw. **F**:

0-2 Treffer: 0 Punkte
3 Treffer: 2 Punkte
4 Treffer: 3 Punkte
5 Treffer: 4 Punkte

$\langle \quad \rangle$ $n \log(n) + 3n + 7 = O(n^2)$

$\langle \quad \rangle$ $\sum_{i=1}^{n} 1/i = \Theta(\log n)$

$\langle \quad \rangle$ $n \sin(2\pi n) = \Omega(\sqrt{n})$

$\langle \quad \rangle$ $\sum_{i=1}^{n} i^2 \sim n^3/3$

$\langle \quad \rangle$ $n! = O(e^n)$

Aufgabe PK3. Die *offspring* Verteilung eines Galton-Watson Prozesses sei $(3/8)\delta_0 + (1/8)\delta_1 + (1/2)\delta_2$, d.h. die Werte $0, 1, 2$ werden mit Wahrscheinlichkeiten $3/8$, $1/8$, $1/2$ angenommen. Berechnen Sie die mittlere Anzahl von Individuen in der dritten Generation sowie die Aussterbewahrscheinlichkeit des Prozesses.

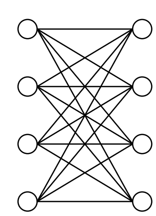
Aufgabe PK4. (a) Geben Sie zu den Strings

$$x_1 = (0, 2, 1, 2, \ldots), \quad x_2 = (2, 1, 1, 0, \ldots), \quad x_3 = (2, 1, 2, 0, \ldots), \quad x_4 = (0, 2, 1, 1, \ldots)$$

den zugehörigen Trie sowie PATRICIA-Trie an.

(b) Nehmen Sie an, n Strings bestehen aus allesamt unabhängigen Symbolen, die identisch gemäß der *offspring* Verteilung in Aufgabe 3 verteilt sind. Was gilt dann für die Tiefe der Knoten im Trie asymptotisch für $n \to \infty$?
(Sie brauchen keinen Dezimalwert anzugeben.)

Aufgabe PK5. Der vollständige bipartite Graph $K_{n,n}$ mit $2n$ Ecken hat die Eckenmenge $V = \{1, \ldots, 2n\}$ und Kanten zwischen Ecken $i, j \in V$ mit $1 \le i \le n < j \le 2n$. Die Abbildung zeigt $K_{4,4}$. Wir behalten alle Kanten jeweils unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p bei, sonst werden sie gelöscht. Der resultierende Graph heiße $K_{n,n,p}$. Zeigen Sie, dass für $p = p(n) = (2 \log n)/n$ asymptotisch fast sicher keine isolierten Ecken in $K_{n,n,p}$ existieren.



Aufgabe PK6. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariable in das Einheitsquadrat $[0,1]^2$. Zeigen Sie, dass für die Länge $L_n = \mathsf{tsp}(X_1, \dots, X_n)$ einer *traveling salesman tour* durch $X_1, \dots, X_n$ gilt

$$\mathbb{P}(|L_n - \mathbb{E}[L_n]| \geq t) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{4n}\right), \quad t > 0.$$

Aufgabe PK7. Ein zufälliger Binärsuchbaum werde sukzessive aufgebaut. Nach Einfügen von 9 Knoten habe der Baum 4 Knoten mit genau einem Kind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Baum nach Einfügen von 4 weiteren Knoten keinen Knoten mit genau einem Kind hat.

Aufgabe PK8. Ein Trie werde von $n \geq 2$ unabhängigen Strings bestehend aus unabhängigen Bernoulli$(1/2)$ verteilten Symbolen aufgebaut. Es bezeichne S_n die Anzahl der Knoten des Tries. Zeigen Sie, dass für alle $c > 2$ gilt:

$$\mathbb{P}(S_n \geq cn \log_2 n) \leq n^{2-c}.$$

Keine Abgabe.