Elementare Stochastik

Sommersemester 2021

Ralph Neininger

7. April 2022

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen

Die Veranstaltung. Das vorliegende Skript ist Begleitmaterial einer vierstündigen Vorlesung „Elementare Stochastik“, die mit zweistündigen Übungen an der Goethe Universität Frankfurt a.M. angeboten wird. Die Vorlesung wird als Pflichtveranstaltung gemeinsam von Studierenden der Studiengänge Lehramt an Gymnasien (L3, Studienanteil Mathematik) sowie Bachelor Mathematik besucht. Der Zusatz „elementar“ im Titel der Veranstaltung deutet an, dass die Vorlesung in das Gebiet Stochastik einführt und weitgehend ohne maßtheoretische Grundlagen auskommt. Benötigt wird wesentlich die Vorlesung „Analysis 1“, allerdings werden auch verschiedene Bezüge zur „Linearen Algebra“ angesprochen. Im Skript finden sich auch Hinweise, die sich jeweils speziell an Studierende nur eines der beiden Studiengänge richten, die wie folgt markiert sind:

L3: Bemerkung für L3-Studierende: In diesen Bemerkungen finden sich einige Hinweise auf didaktische Aspekte der Stochastik sowie Hinweise auf die Kerncurricula der Sekundarstufe I sowie der gymnasialen Oberstufe des Hessischen Kultusministeriums, siehe
`https://kultusministerium.hessen.de/sites/default/files/media/kcgo-m.pdf`
`https://kultusministerium.hessen.de/sites/default/files/media/kerncurriculum_mathematik_gymnasium.pdf`
Eine fachdidaktische Behandlung der Stochastik ist Teil der Veranstaltung „Didaktik der Oberstufenkurse II“.
In den Kerncurricula werden „Kompetenzbereiche des Faches“ sowie „Inhaltliche Konzepte des Faches“ formuliert. Die Kompetenzbereiche betreffen Aspekte wie Problemlösen, Modellieren, Argumentieren oder mit symbolischen und formalen Elementen umzugehen. Sie sind unabhängig von den speziellen mathematischen Inhalten relevant.
Als inhaltliche Konzepte der Kerncurricula (mit leicht unterschiedlichen Formulierungen für Sekundarstufe I bzw. Oberstufe) werden „Zahl und Operation“, „Raum und Form“, „Größen und Messen“, „Funktionaler Zusammenhang“ sowie „Daten und Zufall“ identifiziert. Wenngleich diese Konzepte offenbar auch mehrfach verschiedene Gebiete der Mathematik, etwa Algebra, Analysis, Geometrie oder Stochastik, betreffen, so sind sie dennoch in den jeweils entsprechenden Gebieten besonders dominant. Im vorliegenden Skript werden Begriffe und Zusammenhänge besprochen, die den Bereich „Daten und Zufall“ betreffen, sowohl was Grundlagen der Sekundarstufe I betrifft wie auch die Themenfelder der Qualifikationsphase Q3 der gymnasialen Oberstufe.
Teil der Vorlesung ist, mit der freien Programmiersprache R

`https://www.r-project.org/`

für statistische Berechnungen und Grafiken umzugehen. Die Studierenden des Lehramts an Gymnasien sollen damit ein Hilfsmittel zur grafischen Darstellung von Daten und zur statistischen Datenanalyse kennenlernen und zudem in die Lage versetzt wer-

den, Simulationen zur Illustration stochastischer Phänomene und Gesetzmäßigkeiten für ihren Unterricht vorbereiten zu können.

Entsprechend sind Bemerkungen für Studierenden des Bachelor-Studiengangs markiert:

BSc: Bemerkung für Bachelor-Studierende: In diesen Bemerkungen finden sich Hinweise auf Verbindungen zu anderen Veranstaltungen des Studiengangs Bachelor Mathematik, insbesondere inhaltliche Ausblicke auf Themen der Vorlesungen „Statistik 1“, „Stochastischen Prozesse“ und „Höhere Stochastik“.
Teil der Vorlesung ist, mit der freien Programmiersprache R

`https://www.r-project.org/`

für statistische Berechnungen, Graphiken und Simulationen umzugehen. Dies bereitet zudem auf die Vorlesung „Statistik 1“ vor, die für eine Spezialisierung im Bachelor Mathematik in Statistik benötigt wird und die unabhängig von einer mathematischen Spezialisierung in Statistik empfohlen wird.

Der Zufall. Die Fragen, was denn Zufall sei, und ob Zufall existiere, sind im Grunde ungeklärt. Denkbar ist, dass uns wahre (deterministische) Mechanismen hinter Phänomenen unbekannt sind und diese uns nur deshalb zufällig erscheinen. Denkbar ist dagegen ebenso, dass der Zufall gegebener Bestandteil der Natur ist. Diese Fragen brauchen wir aber nicht zu klären. Selbst wenn wir etwa die Augenzahl beim Würfeln aus einer hinreichend genauen physikalischen Beschreibung des Wurfs deterministisch im Voraus bestimmen könnten, spricht vieles dafür anzunehmen, dass der Vorgang vom Zufall gesteuert werde. Diese weiter gefasste Vorstellung des Zufalls würde dann die beiden oben beschriebenen gegensätzlichen Standpunkte umfassen.
In der Stochastik werden Wahrscheinlichkeiten, Ereignisse und Zufallsvariable als mathematische Begriffe definiert und untersucht. Dies erlaubt, Gesetzmäßigkeiten des Zufalls aufzudecken und zu beweisen. Scheinbar willkürliche Phänomene folgen beweisbaren Gesetzen, z.B. bei zahlreichem Wurf einer Münze wird etwa in der Hälfte der Fälle „Zahl“ beobachtet. Was hierbei „etwa“ bedeutet, wird z.B. in den Gesetzen der großen Zahlen mathematisch spezifiziert und zum Teil quantifiziert.

Stochastische Modellierung. Die mathematische Sprache der Stochastik ermöglicht, Aspekte der Realität durch mathematische Modelle idealisiert zu beschreiben. Diese Modelle können sodann untersucht werden, um zu Vorhersagen zu kommen, die dann wieder mit der Realität verglichen werden können. Als einfaches Beispiel werfen wir drei Würfel gleichzeitig und ermitteln die Gesamtaugenzahl. Ist 11 ebenso wahrscheinlich wie 12? Mögliche Würfelkonstellationen sind:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{„11“:} & 641,\ 632,\ 551,\ 542,\ 533,\ 443 \\ \text{„12“:} & 651,\ 642,\ 633,\ 552,\ 543,\ 444 \end{array}\right\} \text{ jeweils 6 Möglichkeiten}$$

Glücksspieler des 17. Jahrhunderts „wussten“ schon, dass 11 häufiger ist als 12, was empirische Daten auch belegen. Um dem nachzugehen, liegt es nahe, ein mathematisches

(idealisiertes) Modell zu entwerfen, in dem sich die beiden relevanten Wahrscheinlichkeiten berechnen lassen.
Allgemein kommt man zu folgender stochastischen Betrachtungsweise:

(i) Modellbildung: Man präzisiere, welche Versuchsausgänge betrachtet werden sollen.

(ii) Man nimmt an, dass zu jedem Ereignis A eine Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$ gehört, die man für „einfache“ Ereignisse festlegt.

(iii) Man versucht auf der Grundlage konsistenter Rechenregeln aus Wahrscheinlichkeiten für einfache Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten komplizierter Ereignisse zu bestimmen oder zu approximieren.

(iv) Man überprüft die Ergebnisse an der Wirklichkeit. Dies macht gegebenenfalls eine Korrektur am Modell notwendig.

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Die Stochastik teilt sich in die zwei Teilgebiete Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Grob gesagt geht man in der Wahrscheinlichkeitstheorie davon aus, dass die ein Phänomen steuernden Wahrscheinlichkeiten bekannt sind (etwa im Rahmen einer Modellierung) und untersucht davon ausgehend das Modell weiter. In der Statistik sind diese dagegen unbekannt. Dafür liegen Daten vor, aus denen Schlussfolgerungen gezogen werden können, etwa auf solche steuernde Wahrscheinlichkeiten. Offenbar betreffen die beiden Teilgebiete Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik sich jeweils gegenseitig.

L3: Bemerkung für L3-Studierende: Der Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik findet sich im oben genannten PDF Dokument des Kerncurriculums für die Sekundarstufe I etwa auf Seite 29 unten, wo das Inhaltsfeld „Daten und Zufall“ näher beschrieben wird. Dort finden sich in der oberen Spalte „statistische Erhebungen und ihre Auswertung“ sämtlich Themen der Statistik während in der unteren Spalte „Umgang mit dem Zufall“ Themen der Wahrscheinlichkeitstheorie genannt sind.
Die Statistik teilt sich wiederum in deskriptive (beschreibende) Statistik und Inferenzstatistik. In der deskriptive Statistik werden Daten durch Tabellen, Kenngrößen, Lage- und Streumaße und Grafiken übersichtlich dargestellt. Dies sind Themen der Klassenstufen 5–8. In der Inferenzstatistik, auch beurteilende (oder schließende, oder mathematische) Statistik genannt, werden aus den Daten mit mathematischen Mitteln Schlussfolgerungen, wie oben skizziert, gezogen. Dies betrifft die Themenfelder der Qualifikationsphase Q3 der gymnasialen Oberstufe:
Q3.4 Hypothesentests (für binomialverteilte Zufallsgrößen)
Q3.5 Prognose- und Konfidenzintervalle (für binomialverteilte Zufallsgrößen)
Im vorliegenden Skript werden Aspekte der Inferenzstatistik in Kapitel 4 behandelt, die die Themen aus Q3.4 und Q3.5 umfassen. Die deskriptive Statistik wird in einigen speziell für L3-Studierende gestellten Übungsaufgaben adressiert.

1 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

1 Wahrscheinlichkeitsräume

Für den Begriff der Wahrscheinlichkeiten und deren Umgang hat sich eine Axiomatik auf mengentheoretischer Grundlage bewährt, die 1933 von KOLMOGOROV entwickelt wurde. Im Rahmen der Axiomatik wird eine inhaltliche Deutung aufgegeben. Wir sehen zunächst, dass sich aus Kolmogorovs Axiomen leicht die gängigen Eigenschaften und Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten ableiten lassen. Im Anschluss (siehe Bezeichnung 1) starten wir mit einer inhaltlichen Deutung.

Definition 1.1. Ein *diskreter Wahrscheinlichkeitsraum* ist ein Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ bestehend aus einer nichtleeren, höchstens abzählbaren Menge Ω, der Potenzmenge $\mathfrak{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ von Ω und einer Abbildung $\mathbb{P} : \mathfrak{A} \to [0, 1]$ mit

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

(ii)
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$
für jede Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen $A_i \in \mathfrak{A}$. (σ-*Additivität*)

Lemma 1.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gelten

(a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(b) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$, falls $A_1, ..., A_n$ paarweise disjunkt. (*endl. Additvität*)

(c) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$. ($A^c := \Omega \setminus A$)

(d) $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ für $A, B \in \mathfrak{A}$.

(e) $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$, falls $A \subseteq B$ für $A, B \in \mathfrak{A}$. (*Monotonie*)

(f) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

(g) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ für jede Folge $(A_i)_{i\geq 1}$ in $\mathfrak{A}$. (*Sub-σ-Additivität*)

Beweis.

(a) Wähle $A_i = \emptyset$ für alle $i \geq 1$. Da die A_i paarweise disjunkt sind, liefert die σ-Additivität
$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset)$$
Es folgt also $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, denn die Annahme $\mathbb{P}(\emptyset) > 0$ führt zum Widerspruch.

(b) Wähle $B_i = A_i$ für $i = 1, \dots, n$ und $B_i = \emptyset$ für $i > n$. Dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \overset{(ii)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) \overset{(a)}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

(c) A, A^c sind disjunkt und $\Omega = A \cup A^c$. Damit gilt

$$1 \overset{(i)}{=} \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c) \overset{(b)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c), \quad \text{also} \quad \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

(d) Wir schreiben $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ als disjunkte Zerlegung. Damit folgt

$$\mathbb{P}(B) \overset{(b)}{=} \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \setminus A), \quad \text{also} \quad \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

(e) Da $A \subset B$, ist $B = A \cup (B \setminus A)$ eine disjunkte Zerlegung. Es folgt

$$\mathbb{P}(B) \overset{(b)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A), \quad \text{da } \mathbb{P}(B \setminus A) \geq 0.$$

(f) Wir schreiben $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ als disjunkte Zerlegung. Somit folgt

$$\mathbb{P}(A \cup B) \overset{(b)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \overset{(d)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A).$$

(g) Seien $B_1 = \emptyset$ und $B_i := \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$ für $i \geq 2$. Es gilt dann

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus B_i),$$

wobei rechts nun eine Vereinigung paarweise disjunkter Mengen steht. Es folgt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \overset{(ii)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i \setminus B_i) \overset{(e)}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

∎

Lemma 1.3. Die σ-Additivität aus Definition 1.1(ii) ist äquivalent zur gleichzeitigen Gültigkeit von

(i') *endliche Additivität* (vergleiche Lemma 1.2(b))

(ii') *Stetigkeit von unten*, d.h. für jede Folge $(A_i)_{i \geq 1}$ in $\mathfrak{A}$ mit $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Beweis.
„⇒“: Dass (i') gilt, haben wir bereits gezeigt. Zu (ii'): Sei $(A_i)_{i\geq 1}$ eine aufsteigende Folge in $\mathfrak{A}$, d.h. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ Dann gilt $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ mit $B_1 = A_1$ und $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$ für $i \geq 2$. Die B_i sind nach Konstruktion paarweise disjunkt, und es gilt $\mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}(A_{i-1})$. Es folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \overset{(ii)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{i} \mathbb{P}(B_j) \\
&= \lim_{i\to\infty} \left(\mathbb{P}(A_1) + (\mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1))) + (\mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_2)) + \cdots + (\mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}(A_{i-1}))\right) \\
&= \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(A_i).
\end{aligned}$$

„⇐“: Gelte nun (i'), (ii'). Sei $(A_i)_{i\geq 1}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{A}$. Dann gilt mit $B_i = \bigcup_{j=1}^{i} A_j$ die Identität $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Die so konstruierte Folge $(B_i)_{i\geq 1}$ ist ferner aufsteigend, d.h. $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \cdots$, und es gilt $\mathbb{P}(B_i) = \sum_{j=1}^{i} \mathbb{P}(A_j)$ nach (i'). Ferner gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \overset{(ii')}{=} \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(B_i) = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{i} \mathbb{P}(A_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

∎

Bemerkung 1. Falls für alle $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ gilt, dass $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(A_i)$, so spricht man von „Stetigkeit von oben“. Im vorigen Lemma kann „Stetigkeit von unten“ durch „Stetigkeit von oben“ ersetzt werden.

Bemerkung 2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$. Dann ist $\mathbb{P} : \mathfrak{A} \to [0,1]$ bereits durch die Werte $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$ für $i \geq 1$ vollständig festgelegt. Denn für jedes $A \in \mathfrak{A}$ ist $A = \bigcup_{\omega_i \in A} \{\omega_i\}$ eine Darstellung als Vereinigung paarweise disjunkter Mengen. Damit gilt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{\omega_i \in A} p_i = \sum_i \mathbb{1}_A(\omega_i) p_i. \tag{1}$$

Hierbei bezeichnet $\mathbb{1}_A$ die Indikatorfunktion von A, gegeben durch

$$\mathbb{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A, \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A. \end{cases}$$

Umgekehrt kann auch für beliebige $p_i \in [0,1]$ mit $\sum_i p_i = 1$ mittels (1) ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert werden.

Bezeichnung 1. Wir haben einige technische Begriffe der Stochastik eingeführt, die wir im Folgenden mit einer Bedeutung versehen wollen.

(i) Ω heißt *Grundraum, Ergebnismenge, Stichprobenraum* oder *Ergebnisraum.*

(ii) Elemente von $\mathfrak{A}$ heißen *Ereignisse*, $A = \{\omega\}$ heißt *Elementarereignis*.

(iii) $\mathbb{P}$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß* (oder *Wahrscheinlichkeitsverteilung*, $\mathbb{P}(A)$ bezeichnet die *Wahrscheinlichkeit des Ereignisses* A.

Beispiel 1.4. ***(1)*** *Laplace-Modelle* (Gleichverteilung).
Endliche Räume $\Omega = \{1, \dots, n\}$ mit $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{n} =: p_i$, also $p_1 = \cdots = p_n$, heißen Laplace-Modelle und $\mathbb{P}$ dann Gleichverteilung. Es gilt dann

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega_i \in A} \{\omega_i\}\right) = \sum_{\omega_i \in A} \mathbb{P}\left(\{\omega_i\}\right) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Dabei bezeichnet $|A|$ die Kardinalität von A. Man spricht bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in Laplace-Modellen von „Günstige durch Mögliche“.

„Würfeln mit fairem Würfel“: $\Omega = \{1, \dots, 6\}$, wobei $\mathbb{P}(\{i\}) =: p_i$ und $p_1 = p_2 = \cdots = p_6$. Wegen $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{6} p_i = 6p_1$ folgt $p_i = \frac{1}{|\Omega|} = 1/6$.

„Geburtstagsproblem“: Es befinden sich m Personen in einem Raum, wir interessieren uns für das Ereignis $A =$“Mindestens zwei Anwesende haben am selben Tag Geburtstag“. Zur Modellierung sei

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \,|\, \omega_i \in \{1, \dots, 365\} \text{ für } i = 1, \dots, m\}.$$

Damit ist $A = \{\omega \in \Omega \,|\, \exists\, 1 \le i < j \le m : \omega_i = \omega_j\}$. Wir machen die idealisierte Modellannahme, dass die (m-Tupel der) Geburtstage gleichverteilt seien. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|},$$

wobei

$$|\Omega| = 365^m, \quad A^c = \{\omega \in \Omega \,|\, \forall\, 1 \le i < j \le m : \omega_i \neq \omega_j\}.$$

Das Ereignis A^c entspricht „es gibt keine zwei mit demselben Geburtstag“. Die Anzahl der Möglichkeiten in A^c nimmt mit wachsendem $m \le 365$ wesentlich langsamer zu als die Mächtigkeit $|\Omega| = 365^m$. Deshalb strebt $\mathbb{P}(A)$ rasch gegen 1:

$$|A^c| = \begin{cases} \prod_{i=1}^{m} (366 - i), & m \le 365 \\ 0, & m > 365. \end{cases}$$

m	20	23	40	150
$\mathbb{P}(A)$	0.411	0.507	0.891	$1 - 10^{-15}$

(2) *Poisson-Verteilung* Π_λ mit Parameter $\lambda > 0$.
Es sei $\Omega = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ und $\Pi_\lambda(\{n\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ für $n \ge 0$. Es ist damit ein Wahrscheinlichkeitsmaß Π_λ festgelegt, vgl. Bemerkung 2, denn es gilt

$$\Pi_\lambda(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_\lambda(\{n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

Poisson-Verteilungen werden zur Modellierung der Anzahl seltener Phänomene pro Zeiteinheit verwendet. Beispiele sind die Anzahl fehlerhafter Teile in einer großen Produktion, Emission von α-Teilchen beim radioaktiven Zerfall oder die Anzahl der Druckfehler in einem Buch. Weshalb dabei jeweils zur Modellierung die Poisson-Verteilungen geeignet ist, werden wir später in Abschnitt 13 sehen.

*(3) Einpunktverteilung (*Dirac-Maß*).*
Sei Ω eine beliebige, höchstens abzählbare Menge und $\omega_0 \in \Omega$. Wir definieren

$$\delta_{\omega_0}(A) := \mathbb{1}_A(\omega_0) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega_0 \in A, \\ 0, & \text{falls } \omega_0 \notin A, \end{cases}$$

für alle $A \in \mathfrak{A}$. Dann ist $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \delta_{\omega_0})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

L3: Bemerkung für L3-Studierende: Der „axiomatische Wahrscheinlichkeitsbegriff“ aus Definition 1.1 ist mathematisch sauber, tragfähig und modern. Er erfordert vom Lernenden allerdings ein gewisses Maß an Erfahrung und mathematischer Reife und unterstützt (absichtlich, da axiomatisch) weniger den Aufbau von stochastischen Grundvorstellungen. Es stellen sich deshalb hier im Hinblick auf die Situation an der Schule didaktische Fragen. Dazu einige Stichworte zu anderen Zugängen, Wahrscheinlichkeiten zu definieren und zu interpretieren. (Die in diesem Abschnitt abgeleiteten Rechenregeln und Sachverhalte sind stets gültig.)
Der „Laplacesche Wahrscheinlichkeitsbegriff“ betrifft die oben diskutierten Laplace-Modelle, in denen die Elementarereignisse alle gleichwahrscheinlich sind. Man kann dann Wahrscheinlichkeiten stets als „Günstige durch Mögliche“ erklären, was technisch oft auf kombinatorische Fragen führt, wie sie im nächsten Abschnitt behandelt werden. Der Laplacesche Wahrscheinlichkeitsbegriff ist auf Situationen beschränkt, die von speziellen Symmetrien leben (z.B. Würfel oder Münze), um die Gleichverteilung jeweils zu rechtfertigen.
Der „frequentistische Wahrscheinlichkeitsbegriff“ versteht Wahrscheinlichkeiten von Ereignisse als Grenzwerte relativer Häufigkeiten, mit denen das Ereignis in wiederholten, voneinander unabhängigen Zufallsexperimente eintritt. Die Frequentisten stellen deshalb die Gesetze der großen Zahlen, die wir später besprechen, an den Anfang, um Wahrscheinlichkeiten zu definieren.
Beim „Bayesschen Wahrscheinlichkeitsbegriff“ fließen subjektive, persönliche Einschätzungen eines Sachverhaltes in die Interpretation von Wahrscheinlichkeiten ein. Die Bayesianer verstehen Wahrscheinlichkeiten als Grad der eigenen Überzeugung.

Eine ausführliche Darstellung der Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs für Studierende des Lehramts findet sich in [2, Abschnitt 3.1].

Vorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff finden sich in den Schwerpunktsetzungen des Inhaltsfelds „Daten und Zufall“ der Jahrgangsstufen 5/6. Grundlagen der Wahrscheinlichkeiten finden sich in den Themenfeldern der Oberstufe der Qualifikationsphase Q3.1.

2 Kombinatorik

Wir betrachten zunächst 4 Abzählprobleme.

I: Wie viele 10-stellige Dualzahlen gibt es?

II: Auf wie viele Arten können 3 verschiedene Autos auf 8 Parkplätzen parken?

III: Wie viele mögliche Ergebnisse gibt es beim Lotto „6 aus 49“?

IV: Auf wieviele Arten können 10 gleiche 1-Euro-Münzen auf 3 Kinder verteilt werden?

Es sei im Folgenden stets $M = \{1, \dots, n\}$.

Modell I: Stichprobe der Länge k aus M in Reihenfolge mit Zurücklegen.

$$\Omega_I = M^k = M \times \cdots \times M = \{(\omega_1, \dots \omega_k) \,|\, \omega_i \in M \text{ für } i = 1, \dots, k\}.$$

Satz 2.1. Es gilt $|\Omega_I| = n^k$.

Modell II: Stichprobe der Länge k aus M in Reihenfolge ohne Zurücklegen ($k \leq n$).

$$\Omega_{II} = \left\{(\omega_1, \dots, \omega_k) \in M^k \,\middle|\, \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\right\}.$$

Satz 2.2. Es gilt $|\Omega_{II}| = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$. Ist $k = n$, so befinden wir uns im Spezialfall $\Omega = \mathcal{S}_n$, der Menge aller Permutationen von M, auch symmetrische Gruppe von M genannt. Es folgt, dass $|\mathcal{S}_n| = n!$ gilt.

Modell III: Stichprobe der Länge k aus M ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen.

$$\Omega_{III} = \left\{ \{\omega_1, \dots, \omega_k\} \,\middle|\, \omega_i \in M, \omega_i \neq \omega_j \text{ für alle } 1 \leq i < j \leq n\right\}.$$

Satz 2.3. Es gilt $|\Omega_{III}| = \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$.

Beweis.

Betrachte zunächst $\Omega_{II} = \left\{(\omega_1, \dots, \omega_k) \in M^k \,|\, \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\right\}$ und die Äquivalenzrelation $\sim$ auf Ω_{II} : $(\omega_1, \dots, \omega_k) \sim (\omega'_1, \dots, \omega'_k)$, falls eine Permutation π von $\{1, \dots, k\}$ existiert mit $\omega_i = \omega'_{\pi(i)}$ für $i = 1, \dots, k$. Offenbar gilt $\Omega_{III} = \Omega_{II}/\sim$. Jede Äquivalenzklasse hat $k!$ Elemente. Ein Repräsentant ist etwa jeweils $(\omega_1, \dots, \omega_k) \in \Omega_{II}$ mit $\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_k$. Damit folgt $|\Omega_{III}| = |\Omega_{II}|/k! = n!/(k!(n-k)!)$. ∎

Aus dem Beweis folgt, dass man statt Ω_{III} alternativ auch

$$\Omega'_{III} = \left\{(\omega_1, \dots, \omega_k) \in M^k \,\middle|\, \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_k\right\}$$

wählen kann.

Modell IV: Stichprobe der Länge k aus M ohne Reihenfolge mit Zurücklegen.

$$\Omega_{IV} = \left\{(\omega_1, \ldots, \omega_k) \in M^k \,\middle|\, \omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_k\right\}.$$

Satz 2.4. Es gilt $|\Omega_{IV}| = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$.

Beweis.

Wir betrachten $M^* = \{1, \ldots, n+k-1\}$ und

$$\Omega^*_{III} = \left\{(\omega_1^*, \ldots, \omega_k^*) \in (M^*)^k \,\middle|\, \omega_1^* < \omega_2^* < \cdots < \omega_k^*\right\}$$

sowie die Abbildung $f : \Omega_{IV} \to \Omega^*_{III}$ mit

$$(\omega_1, \ldots, \omega_k) \mapsto (\omega_1, \omega_2 + 1, \ldots, \omega_k + k - 1).$$

Man sieht leicht, dass f bijektiv ist. Damit gilt $|\Omega_{IV}| = |\Omega^*_{III}|$. Nach Modell III gilt $|\Omega^*_{III}| = \binom{n+k-1}{k}$. ∎

Definition 2.5. Die Größen $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ heißen *Binomialkoeffizienten*. Wir setzen $\binom{n}{k} := 0$ für $k < 0$ oder $k > n$.

Interpretation der 4 Modelle:

a) k-maliges sukzessives Ziehen aus einer Urne mit n nummerierten Kugeln:
   - mit/ohne Zurücklegen,
   - mit/ohne Beachten der Reihenfolge des Ziehens.

b) Besetzung von n Zellen durch k Objekte
   - mit/ohne Mehrfachbesetzungen,
   - unterscheidbare/ununterscheidbare Objekte.

   Pauliprinzip: Mehrfachbesetzungen verboten.

Der Rest dieses Abschnitts besteht aus Anwendungen und Verallgemeinerungen der vier kombinatorischen Grundmodelle.

Korollar 2.6 (Binomischer Lehrsatz)**.** Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= (x+y)\cdots(x+y) = \sum_{A \subset \{1,\ldots,n\}} x^{|A|} y^{|A^c|} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{A \subset \{1,\ldots,n\}: |A|=k} x^k y^{n-k} \overset{(2.3)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.\end{aligned}$$

∎

Korollar 2.7. Für $n \in \mathbb{N}$ gelten

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0.$$

Beweis.
Es gilt $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$ und mit $x = 1, y = -1$ in Korollar 2.6 erhält man auch die zweite Summe. ∎

Die Binomialkoeffizienten geben an, auf wie viele Arten man n nummerierte Kugeln in zwei Gruppen teilen kann, so dass sich k Kugeln in Gruppe 1 befinden. Allgemeiner teilen wir nun in r nummerierte Gruppen der Größen $k_1, \ldots, k_r$ mit $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$. Wieviele mögliche Arten gibt es?
Lösung: Für die erste Gruppe gibt es $\binom{n}{k_1}$ Möglichkeiten, zu jeder dieser Möglichkeiten gibt es für die zweite Gruppe $\binom{n-k_1}{k_2}$ Möglichkeiten, usw. Für die r-te Gruppe gibt es $\binom{n-k_1-\cdots-k_{r-1}}{k_r}$ Möglichkeiten. Die Gesamtanzahl ergibt sich durch Multiplikation als

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots\binom{n-k_1-\cdots-k_{r-1}}{k_r} \\
=&\frac{n!(n-k_1)!\cdots(n-k_1-\cdots-k_{r-1})!}{k_1!(n-k_1)!k_2!(n-k_1-k_2)!\cdots k_r!(n-n)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}.
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt:

Satz 2.8. Zu jeder Menge $M = \{1, \ldots, n\}$ und $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}_0$ mit $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$ gibt es genau

$$\frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} =: \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} \tag{2}$$

viele geordnete Zerlegungen in Teilmengen $M_1, \ldots, M_r$ mit $|M_i| = k_i$. Die Zahlen in (2) heißen *Multinomialkoeffizienten.*

Korollar 2.9. Für $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_r \in \mathbb{N}_0 \\ \sum k_i = n}} \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} x_1^{k_1} \cdots x_r^{k_r}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
(x_1 + \cdots + x_r)^n = &\sum_{\substack{A_1,\ldots,A_r \\ \text{Zerlegung von } \{1,\ldots,n\}}} \prod_{i=1}^{r} x_i^{|A_i|} = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_r \geq 0 \\ \sum k_i = n}} \sum_{\substack{A_1,\ldots,A_r \text{ Zerlegung} \\ |A_1|=k_1,\ldots,|A_r|=k_r}} \prod_{i=1}^{r} x_i^{k_i} \\
&\overset{(2.8)}{=} \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_r \in \mathbb{N}_0 \\ \sum k_i = n}} \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} x_1^{k_1} \cdots x_r^{k_r}.
\end{aligned}$$

∎

Satz 2.10. Seien $p_1, \dots, p_r \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auf $\Omega = \{(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}_0^r \mid \sum_{i=1}^{r} k_i = n\}$ durch

$$\mathbb{P}(\{(k_1, \dots, k_r)\}) = \binom{n}{k_1, \dots, k_r} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r} \tag{3}$$

eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben. Sie heißt *Multinomialverteilung* zu den Parametern n und $p_1, \dots, p_r$.

Beweis.
Zu zeigen ist, dass für die Festlegung (3) gilt $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1$, vgl. Bemerkung 2. Dies folgt aber aus Korollar 2.9. ∎

Beispiel 2.11. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei n Würfen mit einem fairen Würfel, k_1 mal 1, k_2 mal 2,...,k_6 mal 6 zu werfen?
Mögliche Formalisierung: Wir wählen

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^n, \quad A = \{\omega \in \Omega : |\{1 \leq i \leq n : \omega_i = j\}| = k_j \text{ für } j = 1, \dots, 6\}.$$

Jedem $\omega \in A$ entspricht genau eine geordnete Zerlegung von $\{1, \dots, n\}$ in Gruppen mit Größen $k_1, \dots, k_6$. Nach Satz 2.8 also $|A| = \binom{n}{k_1, \dots, k_6}$. Da ein Laplace-Modell vorliegt, folgt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6^n} \binom{n}{k_1, \dots, k_6}.$$

Beispiel 2.12. In einer Urne seien s schwarze und w weiße Kugeln, $n := s + w$. Es werden $k \leq n$ Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobe genau ℓ schwarze und $k - \ell$ weiße Kugeln enthält.
Mögliche Formalisierung: Seien

$$A = \{1, \dots, n\}, \quad A_s = \{1, \dots, s\}, \quad A_w = A \setminus A_s = \{s + 1, \dots, n\}.$$

Ferner sei

$$\Omega = \left\{ (\omega_1, \dots, \omega_k) \in A^k \,\middle|\, \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_k \right\},$$

also $|\Omega| = \binom{n}{k}$ (Modell III). Es sei

$$\begin{aligned} B_\ell &= \text{„genau } \ell \text{ schwarze Kugeln unter } k \text{ gezogenen“} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid \omega_i \in A_s \text{ für } i = 1, \dots, \ell, \text{ und } \omega_i \in A_w \text{ für } i = \ell + 1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Es gilt $|B_\ell| = \binom{s}{\ell}\binom{w}{k-\ell}$. Das Laplace-Modell liefert

$$\mathbb{P}(B_\ell) = \frac{\binom{s}{\ell}\binom{w}{k-\ell}}{\binom{s+w}{k}} =: h(\ell; k, s + w, s).$$

Satz 2.13. Für die Parameter $s, w \in \mathbb{N}$ und $1 \le k \le s+w$ ist durch

$$p_\ell := h(\ell; k, s+w, s) = \frac{\binom{s}{\ell}\binom{w}{k-\ell}}{\binom{s+w}{k}}, \quad \ell = 0, \dots, k \tag{4}$$

eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\{0, \dots, k\}$ definiert. Sie heißt *hypergeometrische Verteilung*.

Beweis.
Seien Ω und B_ℓ wie oben. Die B_ℓ sind für $\ell = 0 \vee (k-w), \dots, k \wedge s$ paarweise disjunkt mit $\Omega = \bigcup B_\ell$. Es folgt

$$\sum_{\ell=0\vee(k-w)}^{k\wedge s} h(\ell; k, s+w, s) = 1.$$

Für $\ell < 0 \vee (k-w)$ oder $\ell > k \wedge s$ gilt $h(\ell; k, s+w, s) = 0$, da entsprechende Binomialkoeffizienten in (4) nach der Definition 2.5 Null sind. Wir haben also $\sum_{\ell=0}^{k} p_\ell = 1$. ∎

Beispiel 2.14 (Beispiele zur hypergeometrischen Verteilung)**.** (1) Die Wahrscheinlichkeit, genau ℓ Richtige im Lotto „6 aus 49“ zu haben: $s = 6$, $w = 43$, $k = 6$, also $h(\ell; 6, 49, 6)$.

(2) Qualitätskontrolle: n Produktionsstücke, davon s defekt, $w = n - s$ nicht defekt. Stichprobe der Größe k. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau ℓ Defekte unter der Stichprobe sind, ist $h(\ell, k, s+w, s)$.

(3) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A beim Skat 3 Asse erhält? (Er erhält 10 von 32 Karten, in denen sich insgesamt 4 Asse befinden.)
Lösung: $\frac{\binom{4}{3}\binom{28}{7}}{\binom{32}{10}} = \frac{66}{899}$.

L3: Bemerkung für L3-Studierende: Für alle $n \ge 1$ und $1 \le k \le n$ gilt bekanntlich

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Geben Sie einen analytischen Beweis durch Rechnung mit Fakultäten, siehe Definition 2.5. Geben Sie einen zweiten, kombinatorischen Beweis, der nutzt, dass $\binom{n}{k}$ die Anzahl k-elementiger Teilmengen einer n-elementigen Menge angibt. (*Hinweis dazu:* Sie können unterscheiden, ob eine k-elementige Teilmenge ein ausgezeichnetes Element einer n-elementigen Menge enthält oder nicht.) Welchen der beiden Beweise würden Sie in einem verständnisorientierten Unterricht bevorzugen?
Ähnlich kann man folgende Identität einsehen: Für alle $m \ge n \ge 1$ gilt

$$\binom{n+m}{m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{m-k}. \tag{5}$$

Indem Sie die Kardinalität der Potenzmenge $\mathcal{P}(\{1,\dots,n\})$ auf zwei Arten zählen, können Sie kombinatorisch auch die Identität

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

aus Korollar 2.7 direkt einsehen.
Bestimmen von Laplace-Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Zählverfahren, Lösen einfacher kombinatorischer Zählprobleme sowie Binomialkoeffizienten sind Teil der Themenfelder der Qualifikationsphase Q3.2.

3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit

Beispiel 3.1. 1. Ein fairer Würfel werde geworfen. Modell: $\Omega = \{1,\dots,6\}$, $\mathbb{P}(\{i\}) = 1/6$ für $i = 1,\dots,6$. Ein Beobachter verrate, dass eine gerade Zahl geworfen wurde. Für die neue Situation gilt intuitiv

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\{i\}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \text{ ungerade} \\ \frac{1}{3}, & \text{falls } i \text{ gerade.} \end{cases}$$

2. Versicherungsproblem: Ein männlicher Bürger werde genau k Jahre alt mit Wahrscheinlichkeit p_k, $k \in \mathbb{N}$, mit $\sum_{k\geq 1} p_k = 1$. Gesucht: Wahrscheinlichkeit q_ℓ, dass er im ℓ-ten Lebensjahr stirbt, gegeben, dass er bereits das k-te Jahr erreicht hat. Dazu:

$$\begin{aligned} s_k &= \mathbb{P}\,(\text{wird mindestens } k \text{ Jahre alt}) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} \{\text{wird genau } i \text{ Jahre alt}\}\right) = \sum_{i=k}^{\infty} p_i. \end{aligned}$$

Nun ist intuitiv (heuristisch über relative Häufigkeiten einsichtig)

$$q_\ell = \begin{cases} 0, & \text{für } \ell < k \\ p_\ell / s_k, & \text{für } \ell \geq k. \end{cases}$$

Allgemeines Konzept

Definition 3.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $B \in \mathfrak{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Dann heißt

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \tag{6}$$

die *bedingte Wahrscheinlichkeit von* A unter (Bedingung) B.

L3: Bemerkung für L3-Studierende: Wem die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeiten in (6) durch die Beispiele darüber nicht ausreichend motiviert erscheint, kann sie für den Fall von Laplace-Modellen direkt „einsehen“, man vergleiche dazu die Diskussion in [2, Seite 202] oder das Beispiel zum Ziehen zweier Kugeln aus einer Urne in [4, Seite 52], das dort auf Seite 53 unten dann nochmals aus dem Blickwinkel der formalen Definition (6) aufgegriffen wird.
Das Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten betrifft die Schwerpunktsetzungen zweistufige Zufallsexperimente, Baumdiagramme und Vierfeldertafeln sowie Pfadregeln des Inhaltsfelds „Daten und Zufall“ der Jahrgangsstufen 7/8 sowie für mehrstufige Zufallsexperimente in den Jahrgangsstufen 9/10. Siehe auch Qualifikationsphase Q3.1.

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ stets ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

Lemma 3.3. Für $B \in \mathfrak{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$ ist $\mathbb{P}(\cdot \mid B) : \mathfrak{A} \to [0,1]$ eine auf B konzentrierte Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Beweis.
Es gilt gemäß Monotonie $0 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$ und somit $0 \leq \mathbb{P}(A \mid B) \leq 1$. Es gilt $\mathbb{P}(\Omega \mid B) = \mathbb{P}(\Omega \cap B)/\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)/\mathbb{P}(B) = 1$. Sei ferner $(A_i)_{i \geq 1}$ eine Folge paarweise disjunkter Ereignisse in $\mathfrak{A}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \,\middle|\, B\right) &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap B)\right) \\ &\overset{\sigma\text{-add.}}{=} \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i \mid B).\end{aligned}$$

Damit sind alle Eigenschaften aus Definition 1.1 erfüllt und $\mathbb{P}(\cdot \mid B)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.
Auf B konzentriert: Für $A \subset B^c$ gilt $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\emptyset)/\mathbb{P}(B) = 0$. ∎

Satz 3.4. Seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse mit $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_k \,\middle|\, \bigcap_{j<k} A_j\right).\end{aligned}$$

Beweis.
Induktion nach n:
$n = 1$: $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1 \mid \Omega)$ nach Definition.

$n-1 \to n$:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}\left(A_n \middle| \bigcap_{j<n} A_j\right) \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\le n-1} A_j\right)$$
$$\overset{\text{IV}}{=} \mathbb{P}\left(A_n \middle| \bigcap_{j<n} A_j\right) \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(A_k \middle| \bigcap_{j<k} A_j\right).$$

∎

Satz 3.5 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)**.** Sei $B_1, B_2, \ldots \in \mathfrak{A}$ eine endliche oder abzählbar unendliche Zerlegung von Ω, d.h. B_i sind paarweise disjunkt und $\bigcup_i B_i = \Omega$. Dann gilt für $A \in \mathfrak{A}$:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\{i \,|\, \mathbb{P}(B_i)>0\}} \mathbb{P}(A \,|\, B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Beweis.
Es ist $A = A \cap \Omega = A \cap \bigcup_i B_i = \bigcup_i (B_i \cap A)$, wobei die Mengen $B_i \cap A$ paarweise disjunkt sind für $i \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\{i \,|\, \mathbb{P}(B_i)>0\}} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{\{i \,|\, \mathbb{P}(B_i)>0\}} \mathbb{P}(A \,|\, B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

∎

Satz 3.6 (Satz von Bayes (1763))**.** Sei $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mathbb{P}(A) > 0$ und $B_1, B_2, \ldots \in \mathfrak{A}$ eine endliche oder abzählbar unendliche Zerlegung von Ω mit $\mathbb{P}(B_i) > 0$ für $i = 1, 2, \ldots$ Dann gilt

$$\mathbb{P}(B_i \,|\, A) = \frac{\mathbb{P}(A \,|\, B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j\ge 1} \mathbb{P}(A \,|\, B_j)\mathbb{P}(B_j)}.$$

Beweis.
Es ist

$$\mathbb{P}(B_i \,|\, A) = \frac{\mathbb{P}(B_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \,|\, B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j\ge 1} \mathbb{P}(A \,|\, B_j)\mathbb{P}(B_j)},$$

wobei die letzte Gleichheit durch den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (Satz 3.5) begündet wird. ∎

Beispiel 3.7 (Test für eine seltene Krankheit)**.** Eine Krankheit trete insgesamt bei 0,5% der Bevölkerung auf.

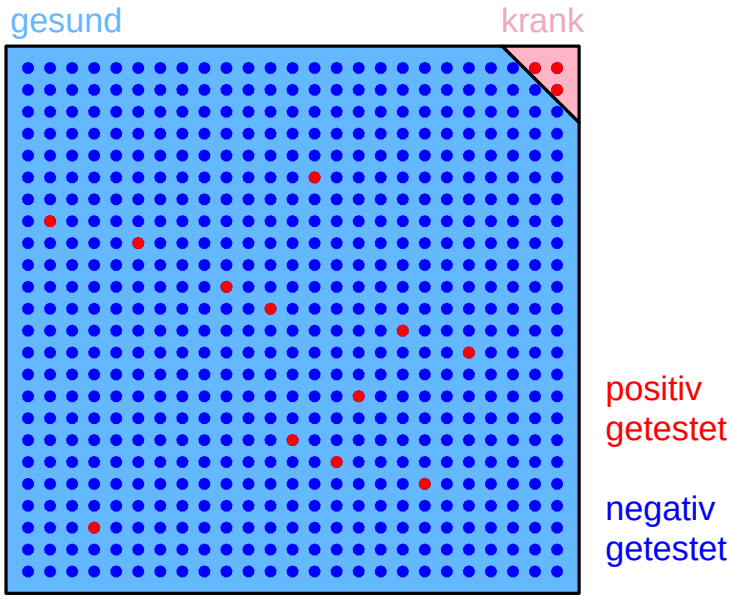
$$\text{Ein Test führe bei } \begin{cases} 99\% \text{ der Kranken zur Reaktion,} \\ 2\% \text{ der Gesunden zur Reaktion.} \end{cases}$$

Man sagt auch, der Test sei positiv, wenn er zur Reaktion führt, andernfalls negativ. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, bei der der Test positiv ist, tatsächlich die Krankheit hat.
Formalisierung: Sei X eine zufällig ausgewählte Person und $B = \{X \text{ hat die Krankheit}\}$, d.h. $\mathbb{P}(B) = 0{,}005$, auch „Prävalenz“ genannt. Ferner sei $A = \{\text{bei } X \text{ ist der Test positiv}\}$, d.h. $\mathbb{P}(A \mid B) = 0{,}99$, auch „Sensitivität“ genannt, und $\mathbb{P}(A \mid B^c) = 0{,}02$. (Die „Spezifität“ ist damit $\mathbb{P}(A^c \mid B^c) = 0{,}98$.) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $\mathbb{P}(B \mid A)$. Nach dem Satz von Bayes und mit der disjunkten Zerlegung $\Omega = B \cup B^c$ gilt

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid B^c)\mathbb{P}(B^c)} = \frac{99}{497} \approx 0{,}2.$$

Von allen Personen, bei denen der Test positiv ist, sind also etwa 20% tatsächlich krank.

L3: Bemerkung für L3-Studierende: Bei Anwendungen des Satzes von Bayes (auch Bayessche Regel genannt) kommt es öfters zu Ergebnissen, die zunächst wenig plausibel erscheinen mögen. Wie kann es in Beispiel 3.7 sein, dass ein Verfahren, das sowohl bei den Kranken wie Gesunden zuverlässig ist, doch im Falle eines positiven Tests mehr Unklarheit als Klarheit schafft?
Das liegt hier hauptsächlich daran, dass die Gruppen der Gesunden und Kranken so unterschiedlich groß sind. Die Graphik veranschaulicht diese Situation. Die Kranken sind durch die Kreise im pinken Bereich (Dreieck) dargestellt, die Gesunden durch die restlichen Kreise im hellblauen Bereich. Ein rot gefärbter Kreis bedeutet, dass der Test positiv ist, blau gefärbt, dass der Test negativ ist. Die Verhältnisse im Bild entsprechen in etwa den Zahlen in Beispiel 3.7. Die Gesunden haben nur selten einen positiven Test, die Kranken (fast) alle. Da nun aber die Gruppe der Gesunden so groß ist gebenüber den Kranken, gibt es unter den Gesunden, absolut gesehen, doch wesentlich mehr positive Testergebnisse als unter den Kranken.



Wenn nun nach der Wahrscheinlichkeit gefragt wird, dass eine Person krank ist gegeben der Test ist positiv, so bedeutet diese, dass unter den positiv getesteten Personen (also unter allen roten Kreisen) eine gleichverteilt gezogen wird und die Wahrscheinlichkeit gefragt ist, dass diese Person krank ist. Es wird nun offenkundig, dass unter allen roten Kreisen die der Gesunden in großer Überzahl sind, was dazu führt, dass die gezogene positiv getestete Person wesentlich häufiger gesund als krank ist.
Ändern Sie nun in Beispiel 3.7 die Prävalenz von 0,5% auf 50%. Berechnen Sie damit $\mathbb{P}(B \mid A)$ und machen Sie sich klar, wie eine entsprechende Graphik aussehen könnte. Verbreitete Methoden, Wahrscheinlichkeiten (und Häufigkeiten) im Kontext des Satzes von Bayes graphisch darzustellen, sind Vierfeldertafeln und Baumdiagramme, siehe etwa [2, Tabelle 3.4 und Abb. 3.33]

Definition 3.8. (a) Zwei Ereignisse $A, B \in \mathfrak{A}$ heißen (stochastisch) *unabhängig*, falls $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ gilt.

(b) Sei $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge und $A_i \in \mathfrak{A}$ für $i \in I$. Die Familie $(A_i)_{i\in I}$ heißt unabhängig, falls für jede endliche Teilfamilie $J \subset I$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j) \qquad \text{„Produktformel“.}$$

(c) Die Familie $(A_i)_{i\in I}$ heißt *paarweise unabhängig*, falls für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ gilt: A_i und A_j sind unabhängig.

Lemma 3.9. Sei $B \in \mathfrak{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Dann gilt:

$$A, B \text{ sind unabhängig } \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A).$$

Beweis.
„$\Rightarrow$“: $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B) = (\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B))/\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)$.
„$\Leftarrow$“: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. ∎

Beispiel 3.10 (Zweimaliges Würfeln mit fairem Würfel)**.** Es ist

$$\Omega = \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\} = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_i \in \{1, \dots, 6\} \text{ für } i = 1, 2\}.$$

Im Laplace-Modell gehen wir davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit eines zweifachen Wurfes gegeben ist durch $\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = 1/36$ für alle $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$. Seien A =“beim ersten Wurf < 4“ und B =“beim zweiten Wurf ≥ 3“.

$$A = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : \omega_1 < 4\}, \quad |A| = 18, \quad \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$$
$$B = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : \omega_2 \geq 3\}, \quad |B| = 24, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}.$$
$$A \cap B = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : \omega_1 < 4, \omega_2 \geq 3\}, \quad |A \cap B| = 12, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}.$$

Es folgt $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, also sind A und B unabhängig.

Lemma 3.11. Sei $\{A_1, \dots, A_r\}$ eine unabhängige Familie von Ereignissen. Seien $B_1, \dots, B_r$ Ereignisse mit $B_i = A_i$ oder $B_i = A_i^c$ für $i = 1, \dots, r$. Dann ist die Familie $\{B_1, \dots, B_r\}$ unabhängig.

Beweis.
Zu zeigen ist, dass für jede Auswahl $(B_i)_{i\in J}$ mit $J \subset \{1, \dots, r\}$ die Produktformel gilt, d.h. $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in J} B_i) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(B_i)$. Sei $|J| = s$ und o.B.d.A. $J = \{1, \dots, s\}$.
1. Fall: $B_i = A_i$ für $i = 1, \dots, s$. Dann folgt die Produktformel aus der Definition der Unabhängigkeit.
2. Fall: Gelte für genau ein $1 \le i \le s$: $B_i = A_i^c$ und $B_j = A_j$ für alle anderen $j \in J \setminus \{i\}$. O.B.d.A. sei $i = 1$, also $B_1 = A_1^c$, $B_j = A_j$ für $j = 2, \dots, s$. Dann ist eine disjunkte Vereinigung gegeben durch

$$\left(A_1^c \cap \bigcap_{\ell=2}^{s} A_\ell\right) \cup \left(A_1 \cap \bigcap_{\ell=2}^{s} A_\ell\right) = \bigcap_{\ell=2}^{s} A_\ell.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A_1^c \cap \bigcap_{\ell=2}^{s} A_\ell\right) &= \prod_{\ell=2}^{s} \mathbb{P}(A_\ell) - \mathbb{P}(A_1) \prod_{\ell=2}^{s} \mathbb{P}(A_\ell) \\ &= (1 - \mathbb{P}(A_1)) \prod_{\ell=2}^{s} \mathbb{P}(A_\ell) = \mathbb{P}(A_1^c) \prod_{\ell=2}^{s} \mathbb{P}(A_\ell).\end{aligned}$$

Der allgemeine Fall ergibt sich nun durch Induktion über die Anzahl der Indizes $1 \le i \le s$, für die $B_i = A_i^c$ gilt. Der Induktionsanfang ist gerade der 2. Fall, der Induktionsschritt kann mit einem ähnlichen Zerlegungsargument gezeigt werden. ∎

4 Produkträume

Wir wollen Modelle entwickeln, um n Zufallsexperimente unabhängig voneinander hintereinander ausführen zu können. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mathbb{P}_1), \dots, (\Omega_n, \mathfrak{A}_n, \mathbb{P}_n)$ diskrete W-Räume, die die Zufallsexperimente beschreiben. Betrachte

$$\begin{aligned}\Omega &:= \bigtimes_{i=1}^{n} \Omega_i = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n \\ &= \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \Omega_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}.\end{aligned}$$

Sei $\mathfrak{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ und seien π_i die Projektionen

$$\pi_i : \Omega \to \Omega_i, \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \omega_i.$$

Für $A_i \in \mathfrak{A}_i$ sind Urbilder gegeben als

$$\begin{aligned}\pi_i^{-1}(A_i) &= \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n \\ &= \text{„das } i\text{-te Teilexperiment hat Ausgang in } A_i\text{“}.\end{aligned}$$

Beispiel 4.1. Wir kommen zu Beispiel 3.10 zurück: $\Omega_i = \{1,\dots,6\}$ für $i = 1,2$.
$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{1,\dots,6\} \times \{1,\dots,6\}$,
A = "beim ersten Wurf < 4"$= \pi_1^{-1}(\{1,2,3\}) = \{1,2,3\} \times \Omega_2$,
B = "beim zweiten Wurf ≥ 3"$= \pi_2^{-1}(\{3,4,5,6\}) = \Omega_1 \times \{3,4,5,6\}$.

Die passende Wahl des W-Maßes in diesem Beispiel führt auf ein allgemeines Problem: Suche eine W-Verteilung $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, sodass:

(1) $\mathbb{P}\left(\pi_i^{-1}(A_i)\right) = \mathbb{P}_i(A_i)$ für alle $A_i \in \mathfrak{A}_i$ und $i = 1,\dots,n$,

(2) $\left\{\pi_i^{-1}(A_i) : i = 1,\dots,n\right\}$ soll eine unabhängige Familie in $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ sein für alle $A_i \in \mathfrak{A}_i$, $i = 1,\dots,n$.

Satz 4.2. Seien $\Omega = \bigtimes_{i=1}^n \Omega_i$ sowie $\mathfrak{A}$ und π_i wie oben. Dann existiert genau eine W-Verteilung $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, sodass (1) und (2) gelten. Dabei ist $\mathbb{P}$ gegeben durch

$$\mathbb{P}(\{(\omega_1,\dots,\omega_n)\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_i(\{\omega_i\}), \quad (\omega_1,\dots,\omega_n) \in \Omega. \tag{7}$$

Beweis.
Beweis hier für $n = 2$, der allgemeine Fall kann analog bewiesen werden.
Eindeutigkeit: Angenommen, $\mathbb{P}$ existiere mit (1) und (2). Wähle $A_1 = \{\omega_1\}$, $A_2 = \{\omega_2\}$ mit $\omega_1 \in \Omega_1$, $\omega_2 \in \Omega_2$. Dann ist $\pi_1^{-1}(A_1) = \{\omega_1\} \times \Omega_2$, $\pi_2^{-1}(A_2) = \Omega_1 \times \{\omega_2\}$ und $\pi_1^{-1}(A_1) \cap \pi_2^{-1}(A_2) = \{(\omega_1,\omega_2)\}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{(\omega_1,\omega_2)\}) =& \mathbb{P}\left(\pi_1^{-1}(A_1) \cap \pi_2^{-1}(A_2)\right) \overset{(2)}{=} \mathbb{P}\left(\pi_1^{-1}(A_1)\right)\mathbb{P}\left(\pi_2^{-1}(A_2)\right)\\ \overset{(1)}{=}& \mathbb{P}_1(A_1)\mathbb{P}_2(A_2) = \mathbb{P}_1(\{\omega_1\})\mathbb{P}_2(\{\omega_2\})\end{aligned}$$

Also kann $\mathbb{P}$ höchstens die Form (7) haben.
Existenz: Z.z. $\mathbb{P}$ wie in (7) ist eine W-Verteilung mit (1) und (2).

- W-Maß: $\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega_1\in\Omega_1}\sum_{\omega_2\in\Omega_2} \mathbb{P}_1(\{\omega_1\})\mathbb{P}_2(\{\omega_2\}) = 1$, da $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ W-Maße sind.

- Zu (1): Sei etwa $i = 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\pi_1^{-1}(A_1)\right) = \mathbb{P}(A_1 \times \Omega_2) &\overset{\sigma\text{-Add}}{=} \sum_{(\omega_1,\omega_2)\in A_1\times\Omega_2} \mathbb{P}(\{(\omega_1,\omega_2)\})\\ \overset{(3)}{=} \sum_{\omega_1\in A_1}\sum_{\omega_2\in\Omega_2} \mathbb{P}_1(\{\omega_1\})\mathbb{P}_2(\{\omega_2\}) &= \sum_{\omega_1\in A_1} \mathbb{P}_1(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}_1(A_1).\end{aligned}$$

- Zu (2): Seien $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ und $A_2 \in \mathfrak{A}_2$. Dann $\pi_1^{-1}(A_1) \cap \pi_2^{-1}(A_2) = A_1 \times A_2$. Also

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\pi_1^{-1}(A_1) \cap \pi_2^{-1}(A_2)\right) = \mathbb{P}(A_1 \times A_2) &= \sum_{(\omega_1,\omega_2)\in A_1\times A_2} \mathbb{P}(\{(\omega_1,\omega_2)\})\\ = \sum_{\omega_1\in A_1}\sum_{\omega_2\in A_2} \mathbb{P}_1(\{\omega_1\})\mathbb{P}_2(\{\omega_2\}) = \mathbb{P}_1(A_1)\mathbb{P}_2(A_2) &\overset{(1)}{=} \mathbb{P}\left(\pi_1^{-1}(A_1)\right)\mathbb{P}\left(\pi_2^{-1}(A_2)\right),\end{aligned}$$

  woraus die Unabhängigkeit folgt.

Es folgt die Behauptung. ∎

Definition 4.3. Der in Satz 4.2 definierte W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ heißt das *Produkt der W-Räume* $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mathbb{P}_i)$. $\mathbb{P}$ wird *Produktmaß* genannt.

Anwendung: *Bernoulli-Experimente.*
Ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ausgängen heißt Bernoulli-Experiment. Wir wollen die n-fache unabhängige Wiederholung modellieren. Sei $\Omega_i = \{0, 1\}$ und $\mathbb{P}_i(\{1\}) = p = 1 - \mathbb{P}(\{0\})$. Man bezeichnet den Ausgang „1“ als Erfolg und nennt $p \in [0, 1]$ die *Erfolgswahrscheinlichkeit.* Ein Modell für die n-fache unabhängige Wiederholung ist:

$$\Omega = \{0, 1\}^n,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) = p^k(1-p)^{n-k} \text{ für } \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \text{ mit } \sum_{i=1}^{n} \omega_i = k.$$

Mit k wird also die Anzahl der Erfolge gezählt.
Zwei grundlegende Fragen dazu sind die Folgenden: Wie lassen sich W-keiten für die Anzahl der Erfolge und die Wartezeit auf den ersten Erfolg beschreiben? Wir betrachten analog zu Modell III aus Abschnitt 2

$$E_k = \left\{ \omega \in \Omega : \sum_{i=1}^{n} \omega_i = k \right\} = \text{„genau } k \text{ Erfolge in } n \text{ Experimenten“}, \quad |E_k| = \binom{n}{k}.$$

Folglich ist $\mathbb{P}(E_k) = \sum_{\omega \in E_k} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in E_k} p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Satz 4.4. Für die Parameter $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ ist durch

$$b_{n,p}(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n$$

eine W-Verteilung auf $\{0, \ldots, n\}$ definiert. Sie heißt *Binomialverteilung* mit Parameter $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$. Statt $b_{n,p}$ wird auch $B(n, p)$ geschrieben.

Korollar 4.5. Die Wahrscheinlichkeiten für die Anzahlen der Erfolge in n unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ sind durch die Binomialverteilung $b_{n,p}$ beschrieben.

Wir betrachten nun die Wahrscheinlichkeit, im k-ten Teilexperiment erstmals einen Erfolg zu haben. Dies ist das Ereignis

$$\begin{aligned} F_k &= \{\omega \in \Omega : \omega_1 = \cdots = \omega_{k-1} = 0, \omega_k = 1\} \\ &= \{0\} \times \cdots \times \{0\} \times \{1\} \times \Omega_{k+1} \times \cdots \times \Omega_n, \end{aligned} \tag{8}$$

also ergibt sich

$$\mathbb{P}(F_k) = p(1-p)^{k-1}. \tag{9}$$

Man beachte, dass auch n Misserfolge möglich sind, weshalb die Zahlen in (9) für $k = 1, \ldots, n$ keine W-Verteilung definieren können. Für $k \in \mathbb{N}$ liefert (9) allerdings eine W-Verteilung.

Satz 4.6. Zum Parameter $p \in (0,1]$ ist durch

$$g_p(\{k\}) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1,2,\ldots$$

eine W-Verteilung auf $\mathbb{N}$ erklärt. Sie heißt *geometrische Verteilung* zum Parameter p.

Korollar 4.7. In einer Folge von unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0,1]$ sind die Wahrscheinlichkeiten für den Index (Zeitpunkt), bei dem erstmals ein Erfolg eintritt, durch die geometrische Verteilung zum Parameter p beschrieben.

Verallgemeinerung: Zeitpunkt des r-ten Erfolgs, $r \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die W-keit, im $(r+k)$-ten Teilexperiment den r-ten Erfolg zu beobachten ($k \in \mathbb{N}_0, r+k \leq n$). Dazu sei

$$G_k = \left\{ \omega \in \Omega : \sum_{i=1}^{r+k} \omega_i = r, \omega_{r+k} = 1 \right\}.$$

Für jedes $\omega \in G_k$ gilt $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p^r(1-p)^{r+k-r} = p^r(1-p)^k$. Andererseits ist $|G_k| = \binom{r+k-1}{r-1}$, denn $r-1$ Indizes werden von $r+k-1$ gezogen ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge. Damit gilt

$$\mathbb{P}(G_k) = \binom{r+k-1}{r-1} p^r(1-p)^k.$$

Satz 4.8. Zu den Parametern $p \in (0,1]$ und $r \in \mathbb{N}$ ist durch

$$nb_{r,p}(\{k\}) = \binom{r+k-1}{r-1} p^r(1-p)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

eine W-Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ gegeben. Sie heißt *negative Binomialverteilung* mit Parametern r und p (oder auch *Pascal-* oder *Pólya-Verteilung*).

Korollar 4.9. In einer Folge von unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0,1]$ sind die W-keiten für die Anzahl der Misserfolge bis zum r-ten Erfolg durch die negative Binomialverteilung zu den Parametern r und p beschrieben.

Bemerkung 3. In der Literatur werden auch andere Vereinbarungen zum Gebrauch der Parameter der negativen Binomialverteilung gemacht. Beim Vergleich verschiedener Quellen sollte stets die individuelle Definition der negativen Binomialverteilung beachtet werden.

5 Diskrete Zufallsvariablen

Definition 5.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein diskreter W-Raum, Ω' eine beliebige Menge. Jede Abbbildung

$$X : \Omega \to \Omega'$$

heißt Ω'-wertige *Zufallsvariable* (ZVe). Falls $\Omega' = \mathbb{R}$, so heißt X *reellwertige ZVe* (oder einfach nur ZVe), falls $\Omega' = \mathbb{R}^d$, so heißt X *Zufallsvektor*.

Satz 5.2. Sei $X : \Omega \to \Omega'$ eine Ω'-wertige diskrete ZVe und $\mathfrak{A}' = \mathcal{P}(\Omega')$. Dann ist durch

$$\mathbb{P}_X : \mathfrak{A}' \to [0,1], \quad A' \mapsto \mathbb{P}\left(X^{-1}(A')\right)$$

ein W-Maß auf $(\Omega', \mathfrak{A}')$ definiert. $\mathbb{P}_X$ heißt *Verteilung der ZVe X* (oder auch Bildmaß unter X).

Beweis.
$\mathbb{P}_X$ bildet offenbar in $[0,1]$ ab. Wir haben

$$\mathbb{P}_X(\Omega') = \mathbb{P}\left(X^{-1}(\Omega')\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Sei $(A_i)_{i\geq 1}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{A}'$. Dann folgt

$$\mathbb{P}_X\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X^{-1}(A_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X^{-1}(A_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_X(A_i).$$

Es folgt die σ-Additivität. ∎

Bemerkung 4. Man beachte, dass Ω' i.A. nicht abzählbar ist (z.B. $\Omega' = \mathbb{R}$), jedoch bildet X nur auf eine höchstens abzählbare Menge $X(\Omega) = \{\omega' \in \Omega' \mid \exists\, \omega \in \Omega : X(\omega) = \omega'\}$ ab. $\mathbb{P}_X$ ist also auf $X(\Omega)$ ein diskretes W-Maß.

Notationen 1. Die folgenden Kurzschreibweisen sind gebräuchlich:
$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} =: \{X \in A\}$.
Für reelle ZVe X: Sei $A = (-\infty, x]$, dann $X^{-1}(A) =: \{X \leq x\}$.

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(\{X \in A\}) =: \mathbb{P}(X \in A),$$
$$\mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathbb{P}(X \in \{k\}) =: \mathbb{P}(X = k).$$

Beispiel 5.3 (n-maliger Münzwurf)**.** Wir betrachten n unabhängige Bernoulli Experimente mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$. $\Omega = \{0,1\}^n$, $\mathbb{P}(\{(\omega_1, \ldots, \omega_n)\}) = p^k(1-p)^{n-k}$ mit $k = \sum_{i=1}^n \omega_i$. Die ZVe

$$X : \Omega \to \mathbb{N}_0, \quad \omega \mapsto \sum_{i=1}^{n} \omega_i$$

beschreibt die Anzahl der „Erfolge“ in Ω. Es ist $X(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$. Wie lautet die Verteilung von X? Sei $A_k := \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega : \sum_{i=1}^n \omega_i = k\}$. Dann

$$\mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathbb{P}(\{X = k\}) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(\{k\})\right) = \mathbb{P}(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Die Anzahl der Erfolge bei n unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ ist binomial $b_{n,p}$ verteilt (d.h. die Verteilung $\mathbb{P}_X$ von X ist die Binomialverteilung mit Parametern n und p, vgl. Korollar 4.5.)

Beispiel 5.4 (k-maliges Ziehen ohne Rücklegen aus einer Urne mit s schwarzen und w weißen Kugeln)**.** Betrachte eine ZVe $X =$"Anzahl gezogener schwarzer Kugeln". Seien $A = \{1, \dots, n\}$, $A_s = \{1, \dots, s\}$, $A_w = A \setminus A_s$, $\Omega = \left\{(\omega_1, \dots, \omega_k) \in A^k \,|\, \omega_1 < \dots < \omega_k\right\}$ (vgl. Beispiel 2.12). Damit haben wir

$$X : \Omega \to \{0, \dots, k\}, \quad (\omega_1, \dots, \omega_k) \mapsto \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{A_s}(\omega_i).$$

Wie in Abschnitt 2 gezeigt, liefert das Laplace-Modell auf Ω:

$$\mathbb{P}_X(\{\ell\}) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(\ell)\right) = \mathbb{P}(B_\ell) = \frac{\binom{s}{\ell}\binom{w}{k-\ell}}{\binom{s+w}{k}}.$$

Die Anzahl X der schwarzen Kugeln ist folglich hypergeometrisch verteilt (zu entsprechenden Parametern).

Ebenso: Bei einer Folge von unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ ist die Wartezeit bis zum ersten Erfolg eine Zufallsvariable, die geometrisch g_p verteilt ist.

L3: Bemerkung für L3-Studierende: Zufallsvariable (dort Zufallsgröße genannt) und Wahrscheinlichkeitsverteilung sind Gegenstand des Kerncurriculums zur Oberstufe in der Qualifikationsphase Q3.3. Die hier betrachteten grundlegenden Verteilungen im Kontext von unabhängigen Bernoulli-Experimenten (geometrische Verteilung, hypergeometrische Verteilung, Binomialverteilung) sind ebendfalls Bestandteil von Q3.3. Dort ist im Kontext von unabhängigen Bernoulli-Experimenten von „Bernoulli-Ketten" die Rede, was insofern eine unglückliche Bezeichnung ist, da es zu Missverständnissen mit Bernoulli-Experimenten kommen kann, die nicht unabhängig sind. Solche abhängigen Bernoulli-Ketten finden sich zum Beispiel auf natürliche Art im Kontext von Markov-Ketten, die in Kapitel 6 besprochen werden. Der Begriff „Kette" geht in der Fachstochastik typischerweise mit Prozessen (Familien von Zufallsvariablen) einher, die nicht unabhängig sind. Den wesentlichen Begriff der Unabhängigkeit von Zufallsvariablen klären wir gleich als nächstes.

Definition 5.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein diskreter W-Raum und $X_i : \Omega \to \Omega_i$ ZVe für $i \in I, I \neq \emptyset$. Die Familie $\{X_i \,|\, i \in I\}$ von ZVen heißt *(stochastisch) unabhängig*, falls für jede Wahl $A_i \subset \Omega_i$ die Familie von Ereignissen $\{\{X_i \in A_i\} \,|\, i \in I\}$ unabhängig ist.

Satz 5.6. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein diskreter W-Raum und $X_1, \dots, X_n$ ZVe auf Ω, $X_i : \Omega \to \Omega_i$. Dann sind äquivalent:

a) $X_1, \dots, X_n$ sind unabhängig.

b) Für alle $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = x_i\}\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_i = x_i\right).$$

c) Für beliebige $A_i \subset \Omega_i$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_i \in A_i\right).$$

Beweis.
a) $\Rightarrow$ c): folgt aus den Definitionen 5.5 und 3.8 b).
c) $\Rightarrow$ b): Wähle $A_i = \{x_i\}$ für $i = 1, \ldots, n$.
b) $\Rightarrow$ a): Seien $A_i \subset \Omega_i$ Mengen. Z.z. ist, dass $\{\{X_i \in A_i\} : i = 1, \ldots, n\}$ Familie unabhängiger Mengen ist, d.h. für jede Teilfamilie die Produktformel gilt. Wir betrachten o.E. die Teilfamilie $\{1, \ldots, s\} \subset \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{s} \{X_i \in A_i\}\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{s} \bigcup_{x_i \in A_i} \{X_i = x_i\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x_1 \in A_1} \cdots \bigcup_{x_s \in A_s} \left(\bigcap_{i=1}^{s} \{X_i = x_i\}\right)\right) \\
&= \sum_{x_1 \in A_1} \cdots \sum_{x_s \in A_s} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{s} \{X_i = x_i\}\right) = \sum_{x_1 \in A_1} \cdots \sum_{x_s \in A_s} \prod_{i=1}^{s} \mathbb{P}(X_i = x_i) \\
&= \left(\sum_{x_1 \in A_1} \mathbb{P}(X_1 = x_1)\right) \cdots \left(\sum_{x_s \in A_s} \mathbb{P}(X_s = x_s)\right) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \cdots \mathbb{P}(X_s \in A_s).
\end{aligned}$$

Also gilt die Produktformel. ∎

Satz 5.7. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige ZVe, $X_i : \Omega \to \Omega_i$. Seien $f_i : \Omega_i \to \Gamma_i$ Funktionen für $i = 1, \ldots, n$. Dann sind die ZVe $Y_1, \ldots, Y_n$ mit $Y_i = f_i \circ X_i$ unabhängig.

Beweis.
Seien $A_i \subset \Gamma_i$ für $i = 1, \ldots, n$ beliebig. Dann ist

$$\{Y_i \in A_i\} = \{f_i \circ X_i \in A_i\} = \left\{X_i \in f_i^{-1}(A_i)\right\}.$$

Da $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, ist $\{\{X_i \in f_i^{-1}(A_i)\} : i = 1, \ldots, n\}$ eine unabhängige Familie von Ereignissen. Folglich ist $\{\{Y_i \in A_i\} : i = 1, \ldots, n\}$ eine unabhängige Familie. Es folgt die Unabhängigkeit von $Y_1, \ldots, Y_n$. ∎

Als Beispiel zur stochastischen Unabhängigkeit betrachten wir die lokalen Ränge einer gleichverteilten, zufälligen Permutation:

Definition 5.8. Sei $\pi \in \mathcal{S}_n$ eine Permutation der Länge n. Dann heißt

$$R_i(\pi) = |\{1 \le j \le i : \pi_j \le \pi_i\}|$$

lokaler Rang von π_i *in* π. Falls $R_i = i$, so heißt π_i ein *(auf-)Rekord* in π, (falls $R_i = 1$, so heißt π_i ein *ab-Rekord*.)

Sei nun eine zufällige, gleichverteilte Permutation durch den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) = (\mathcal{S}_n, \mathcal{P}(\mathcal{S}_n), \mathbb{P})$ beschrieben, wobei $\mathbb{P}$ hier die Gleichverteilung auf $\mathcal{S}_n$ bezeichnet. Ferner seien

$$\begin{aligned} X_i &: \mathcal{S}_n \to \{1, \dots, i\}, \quad \pi \mapsto R_i(\pi), \\ Y_i &: \mathcal{S}_n \to \{0, 1\}, \quad \pi \mapsto \mathbb{1}_{\{i\}}(X_i). \end{aligned}$$

Satz 5.9. Der lokale Rang X_i einer zufälligen gleichverteilten Permutation ist gleichverteilt auf $\{1, \dots, i\}$ für alle $i = 1, \dots, n$. Die ZVe $X_1, \dots, X_n$ sind unabhängig. Die ZVe $Y_1, \dots, Y_n$ sind unabhängig.

Beweis.
Wir zeigen zunächst, dass X_i gleichverteilt auf $\{1, \dots, i\}$ ist. Sei dazu $k \in \{1, \dots, i\}$ beliebig gegeben und $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$. Nach dem Satz von der totalen W-keit 3.5 gilt

$$\mathbb{P}(X_i = k) = \sum_{\substack{A \subset \{1,\dots,n\} \\ |A| = i}} \mathbb{P}(X_i = k \,|\, \{\pi_1, \dots, \pi_i\} = A)\, \mathbb{P}(\{\pi_1, \dots, \pi_i\} = A).$$

Wir haben $\mathbb{P}(X_i = k \,|\, \{\pi_1, \dots, \pi_i\} = A) = \frac{1}{i}$, da gegeben, dass die ersten i Werte der Permutation die Elemente aus A sind, es gleichwahrscheinlich ist, welches dieser Elemente an Position i steht. Aus dem Laplace-Modell folgt ferner

$$\mathbb{P}(\{\pi_1, \dots, \pi_i\} = A) = \binom{n}{i}^{-1}.$$

Damit gilt

$$\mathbb{P}(X_i = k) = \sum_{\substack{A \subset \{1,\dots,n\} \\ |A| = i}} \frac{1}{i} \frac{1}{\binom{n}{i}} = \binom{n}{i} \frac{1}{i} \frac{1}{\binom{n}{i}} = \frac{1}{i}, \quad k = 1, \dots, i.$$

Zur Unabhängigkeit der $X_1, \dots, X_n$: Man beachte, dass zu jeder Wahl von Werten $1 \le x_i \le i$ für $i = 1, \dots, n$ genau eine Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ existiert mit $R_i(\pi) = x_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dies sieht man wie folgt ein: $R_n(\pi) = x_n$ legt den Wert $\pi_n = x_n$ fest. Nun legt aber $R_{n-1}(\pi) = x_{n-1}$ den Wert π_{n-1} fest, denn dies ist gerade die x_{n-1}-kleinste der Zahlen $\{1, \dots, n\} \setminus \{x_n\}$. Ebenso werden die weiteren Werte $\pi_{n-2}, \dots, \pi_1$ festgelegt. Diese Bijektion liefert

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) &= \frac{1}{n!} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} \\ &= \mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_2 = x_2) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n). \end{aligned}$$

Nach Satz 5.6 sind $X_1, \dots, X_n$ also unabhängig.
Schließlich haben die Y_i die Form $Y_i = f_i(X_i)$ mit $f_i(x) = \mathbb{1}_{\{i\}}(x)$. Nach Satz 5.7 sind damit auch $Y_1, \dots, Y_n$ unabhängig. ∎

L3: Bemerkung für L3-Studierende: Praxismaterial für angehende und ausgebildete Lehrkräfte an Gymnasien zur Thematik der Rekorde gleichverteilter Permutationen im Kontext stochastischer Unabhängigkeit, Erwartungswerten und Varianz (siehe Abschnitt 6) sowie auch aus dem Blickwinkel von Tests (siehe Abschnitt 17) findet sich für den Unterricht ab Klasse 10 in [7, Kapitel 5].

6 Erwartungswert und Varianz

In diesem Abschnitt sei stets $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem alle auftretenden Zufallsvariable definiert sind.

Definition 6.1. Sei X eine reellwertige ZVe. Falls $\sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|\,\mathbb{P}(\{\omega\}) < \infty$ ist, so existiert die *Erwartung* (Erwartungswert, EW) von X und ist gegeben durch

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Lemma 6.2. Sei $\{x_1, x_2, \ldots\}$ eine Abzählung des Wertebereichs von X. Es existiere der EW von X. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\,\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\,\mathbb{P}_X(\{x_i\}).$$

Beweis.
Es gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\{\omega\,|\,X(\omega)=x_i\}} X(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\,\mathbb{P}(X = x_i).$$

Dies liefert die Behauptungen. ∎

Bemerkung 5. Der Erwartungswert von X hängt also nur von der Verteilung $\mathbb{P}_X$ der ZVen X ab. Derartige Größen heißen *Verteilungsgrößen*.

Satz 6.3. Seien X, Y reellwertige ZVe mit existierenden EWen. Dann gelten:

(i) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert der EW von λX, und es gilt $\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda\mathbb{E}[X]$.

(ii) Der EW von $X + Y$ existiert, und es gilt $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$.

(iii) Sind X, Y unabhängig, so existiert der EW von XY und es gilt

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

(iv) Falls $X \geq 0$, so gilt $\mathbb{E}[X] \geq 0$.

(v) Falls $X \geq Y$ (punktweise), so gilt $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$.

(vi) Es ist $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$.

Beweis.

(i) Existenz: $\sum_{\omega\in\Omega} |\lambda X(\omega)|\,\mathbb{P}(\{\omega\}) = |\lambda| \sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|\,\mathbb{P}(\{\omega\}) < \infty$. Folglich ist

$$\mathbb{E}[\lambda X] = \sum_{\omega\in\Omega} \lambda X(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\}) = \lambda \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\}) = \lambda\mathbb{E}[X].$$

(ii) Mit der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)+Y(\omega)|\,\mathbb{P}(\{\omega\}) &\le \sum_{\omega\in\Omega} (|X(\omega)|+|Y(\omega)|)\,\mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|\,\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega\in\Omega} |Y(\omega)|\,\mathbb{P}(\{\omega\}) < \infty.\end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung ohne Beträge (und Gleichheit statt der Dreiecksungleichung) liefert die Behauptung.

(iii) Seien $\{x_1, x_2, \ldots\}$ und $\{y_1, y_2, \ldots\}$ Abzählungen der Wertemengen von X und Y. Dann folgt wie im Beweis von Lemma 6.2, dass

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)Y(\omega)|\,\mathbb{P}(\{\omega\}) &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |x_i y_j|\,\mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |x_i||y_j|\,\mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_j) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\,\mathbb{P}(X=x_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|\,\mathbb{P}(Y=y_j)\right) < \infty.\end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung ohne Beträge liefert $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

(iv) Aus $X \ge 0$ folgt $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\}) \ge 0$.

(v) Sei $X(\omega) \ge Y(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega$, dann ist $Z(\omega) := X(\omega) - Y(\omega) \ge 0$. Die Behauptung folgt mit

$$0 \overset{\text{(iv)}}{\le} \mathbb{E}[Z] \overset{\text{(i),(ii)}}{=} \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y].$$

(vi) Es ist $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(A)$.

∎

Korollar 6.4. Die Menge aller auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ definierten reellwertigen ZVe mit existierendem Erwartungswert ist ein Vektorraum, der mit $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ bezeichnet wird. Der Erwartungswert ist ein lineares Funktional

$$\mathbb{E}[\,\cdot\,] : \mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}.$$

Beweis.
Nach Satz 6.3 ist $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ abgeschlossen bzgl. Addition und Multiplikation mit Skalaren, also ein Untervektorraum der Menge aller reellwertigen ZVen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Die Abbildung $X \mapsto \mathbb{E}[X]$ ist linear nach (i) und (ii) in Satz 6.3. ∎

Beispiel 6.5. Sei X binomial $b_{n,p}$ verteilt mit $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$. Dann gilt $\mathbb{E}[X] = np$.

Beweis.
Sei X binomial $b_{n,p}$ verteilt. Wegen $X \leq n$ existiert der EW von X. Es ist X verteilt wie die Anzahl der Erfolge bei n unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Also gilt $X = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$, wobei $A_i = \{\text{Erfolg im } i\text{-ten Teilexperiment}\}$, also $\mathbb{P}(A_i) = p$ für $i = 1, \ldots, n$. Es folgt

$$\mathbb{E}[X] \overset{6.3(ii)}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i}] \overset{6.3(vi)}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = np.$$

∎

L3: Bemerkung für L3-Studierende: Häufig wird für den Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariablen in Beispiel 6.5 folgender (didaktisch verfehlte) rechnerische Beweis gegeben: Es gilt nach Lemma 6.2

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} np \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\
&= np(p + (1-p))^{n-1} \qquad (10) \\
&= np,
\end{aligned}$$

wobei in (10) der Binomische Lehrsatz aus Korollar 2.6 angewandt wurde. Manchmal wird diese Rechnung in Schulbüchern nur für den Fall $n = 3$ präsentiert, da für allgemeines n der Binomische Lehrsatz nicht verfügbar ist. In jedem Falle fördert solch ein rechnerischer Beweis kaum stochastisches Denken. Dagegen sind die Struktur binomialverteilter Zufallsvariable sowie grundlegende Eigenschaften des Erwartungswerts wie oben gezeigt imstande, die Formel $\mathbb{E}[X] = np$ erklärend zu beweisen.

Wir betrachten nun Erwartungswerte passender Kompositionen: Sei $X : \Omega \to \Omega'$ eine ZVe und $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Mit $\mathfrak{A}' = \mathcal{P}(\Omega')$ und $\mathbb{P}_X$ wird der Definitionsbereich von f zu einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathfrak{A}', \mathbb{P}_X)$. Deshalb kann man die Abbildung $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ als reellwertige ZVe auffassen. Der Deutlichkeit halber bezeichne $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ den EW von ZVen auf Ω, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_X}$ den EW von ZVen auf Ω'.

Satz 6.6 (Transformationssatz)**.** In der Situation der vorigen fünf Zeilen gilt: Es existiert der EW von $f \circ X$ (bez. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$) genau dann, wenn der EW von f (bez. $\mathbb{P}_X$) existiert. In diesem Fall gilt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f \circ X] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_X}[f].$$

Beweis.
Sei $\{x_1, x_2, \ldots\}$ eine Abzählung der Werte von X und $A_i = \{X = x_i\} \subset \Omega$. Dann bilden $A_1, A_2, \ldots$ eine disjunkte Zerlegung von Ω und für $\omega \in A_i$ gilt $X(\omega) = x_i$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)|\, \mathbb{P}_X(\{x_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)|\, \mathbb{P}(A_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A_i} |f(x_i)|\, \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A_i} |f(X(\omega))|\, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} |f(X(\omega))|\, \mathbb{P}(\{\omega\}).\end{aligned}$$

Damit hat f einen EW bez. $\mathbb{P}_X$ genau dann, wenn $f \circ X$ einen EW bzgl $\mathbb{P}$ hat. Die gleiche Rechnung ohne Beträge liefert die Behauptung. ∎

Bemerkung 6. Lemma 6.2 kann wie folgt umgeschrieben werden: Bezeichne $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ die Identität auf $\mathbb{R}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathrm{id} \circ X] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_X}[\mathrm{id}].$$

Der Erwartungswert kann als Maßzahl für den „Schwerpunkt“ bzw. den „mittleren Wert“ einer Verteilung aufgefasst werden. Wir betrachten zudem Maßzahlen für Streuung um den Erwartungswert.

Definition 6.7. Seien X, Y reelle ZVe, sodass X^2, Y^2 existierenden EW haben. Dann heißen:

- $\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ die *Varianz* von X,
- $\sigma_X := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ die *Standardabweichung* von X,
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$ die *Kovarianz* von X und Y,
- $\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$ der *Korrelationskoeffizient* von X und Y.

X und Y heißen *unkorreliert*, falls $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ gilt.

Bemerkung 7. Alle EWe in Definition 6.7 sind definiert (existieren), da $|X| \leq 1 + X^2$, also existiert $\mathbb{E}[X]$ und $(X - \mathbb{E}[X])^2 \leq X^2 + 2|\mathbb{E}[X]||X| + (\mathbb{E}[X])^2$. Also existiert auch $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$, ferner benutze man $|X \cdot Y| \leq X^2 + Y^2$. Falls X eine ZVe ist, so dass der EW von X^2 existiert, sagt man, dass X ein endliches *zweites Moment* habe.

Satz 6.8. Seien $X, Y, X_1, \ldots, X_n$ ZVe mit endlichem zweiten Moment. Dann gilt für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

(i) $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$,

(ii) $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$,

(iii) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$,

(iv) $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\mathrm{Cov}(X, Y)$,

(v) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$,

(vi) $\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i\neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$,

(vii) X, Y unabhängig $\Rightarrow X, Y$ unkorreliert.

Beweis.
(i)-(v) folgen direkt aus der Definition. Z.B. für (i):

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mathbb{E}[X]X + \mathbb{E}[X]^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[2\mathbb{E}[X]X] + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]^2.\end{aligned}$$

(vi) Wegen (ii) können wir o.E. $\mathbb{E}[X_i] = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ annehmen. Dann folgt

$$\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) \overset{(i)}{=} \mathbb{E}[(X_1 + \cdots + X_n)^2] = \sum_{i,j\leq n} \mathbb{E}[X_iX_j] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^2] + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}[X_iX_j].$$

Wegen $\mathbb{E}[X_i] = 0$ ist dies $\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i\neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.
(vii) Seien X, Y unabhängig. Nach Satz 5.7 sind dann $(X - \mathbb{E}[X]), (Y - \mathbb{E}[Y])$ unabhängig. Also

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]]\mathbb{E}[Y - \mathbb{E}[Y]] = 0 \cdot 0 = 0.$$

Somit sind X, Y unkorreliert. ∎

Satz 6.9 (Bienaymé)**.** Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig mit endlichem zweiten Moment. Dann gilt

$$\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i).$$

Beweis.
O.E. gelte $\mathbb{E}[X_i] = 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Nach Satz 6.8 (vi) gilt $\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}[X_iX_j]$. Nach Satz 6.8 (vii) sind X_i, X_j unkorreliert für $i \neq j$. Damit ist $\mathbb{E}[X_iX_j] = \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] = 0$. Es folgt die Behauptung. ∎

Beispiel 6.10. Sei X binomial $b_{n,p}$ verteilt mit $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$. Dann gilt

$$\mathrm{Var}(X) = np(1 - p).$$

Beweis.
Wie im Beweis von Beispiel 6.5 haben wir $X = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$, wobei $\mathbb{P}(A_i) = p$ und $\mathbb{1}_{A_1}, \ldots, \mathbb{1}_{A_n}$ unabhängige ZVe sind. Es gilt $\mathrm{Var}(\mathbb{1}_{A_i}) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i}^2] - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i}]^2 = p - p^2 = p(1-p)$. Nach Satz 6.9 liefert Unabhängigkeit der Indikatoren, dass $\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(\mathbb{1}_{A_i}) = np(1-p)$. ∎

L3: Bemerkung für L3-Studierende: Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung sind Themenfelder der Qualifikationsphase Q3.3, ebenso deren Berechnung für binomialverteilte Zufallsvariable. Das erhöhte Niveau (Leistungskurs) der Qualifikationsphase Q3.3 umfasst zudem Erwartungswerte von Zufallsvariablen mit Dichten, insbesondere für normalverteilte Größen. Dies wird im vorliegenden Skript in Abschnitt 10 abgedeckt.

7 Erzeugende Funktionen

Erzeugende Funktionen sind ein analytisches Hilfsmittel zum Studium von Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbb{N}_0$.

Definition 7.1. Die *erzeugende Funktion* einer W-Verteilung μ auf $\mathbb{N}_0$ mit $\mu(\{k\}) =: p_k$ ist gegeben durch

$$g(s) = g_\mu(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k. \tag{11}$$

Beobachtungen:

- Die Funktion in (11) ist innerhalb des Konvergenzradius (also im Konvergenzintervall) der Potenzreihe definiert. Für $|s| \le 1$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} p_k |s^k| \le \sum p_k = 1 < \infty$. Die Potenzreihe in (11) ist also mindestens für $|s| \le 1$ definiert. (Für den Konvergenzradius r gilt $r \ge 1$.)
- Sei X eine ZVe in $\mathbb{N}_0$ mit Verteilung $\mathbb{P}_X$. Dann ist $g_{\mathbb{P}_X}(s) = \mathbb{E}[s^X]$.
- Ableitungen: Bezeichne $g^{(n)}$ die n-te Ableitung von g, $g^{(0)} := g$. Dann gilt

$$g'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k s^{k-1}, \quad g^{(n)}(s) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} p_k s^{k-n}.$$

  Speziell für $s = 0$: $g^{(n)}(0) = n! p_n$ also, $p_n = g^{(n)}(0)/n!$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Korollar 7.2. Eine Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ ist eindeutig durch ihre erzeugende Funktion festgelegt, d.h. die Abbildung $\mu \mapsto g_\mu$ ist injektiv.

Beispiel 7.3. (i) Poisson-Verteilung Π_λ zum Parameter $\lambda > 0$: Es gilt $p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. Damit folgt für alle $s \in \mathbb{R}$

$$g_{\Pi_\lambda}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} s^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda(s-1)}.$$

(ii) Sei X geometrisch g_p verteilt mit $p \in (0,1)$: Es ist dann $p_k = p(1-p)^{k-1}$ für $k \geq 1$. Damit gilt

$$g_{g_p}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}s^k = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}((1-p)s)^k = \frac{ps}{1-s(1-p)}$$

für $|s| < 1/(1-p)$. Der Konvergenzradius ist hier also beschränkt.

(iii) Für die Binomialverteilung $b_{n,p}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$ erhalten wir für $s \in \mathbb{R}$

$$g_{b_{n,p}}(s) = (ps + 1 - p)^n.$$

Ein allgemeines Problem stellt die Rückgewinnung von Information über μ aus g_μ dar. Wir diskutieren, wie Erwartungswert und Varianz einer Zufallsvariable X mit Verteilung $\mathbb{P}_X = \mu$, falls diese jeweils existieren, aus g_μ berechnet werden können.

Satz 7.4. Sei X eine ZVe in $\mathbb{N}_0$ mit Verteilung $\mathbb{P}_X$ und erzeugender Funktion $g = g_{\mathbb{P}_X}$. Der EW von X existiert genau dann, wenn der linksseitige Grenzwert

$$g'(1-) := \lim_{s\uparrow 1} g'(s)$$

existiert. Es gilt dann $\mathbb{E}[X] = g'(1-)$.

Beweis.
Für $|s| < 1$ ist $g'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k s^{k-1}$ endlich. Falls $\mathbb{E}[X]$ existiert, ist also auch $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k < \infty$. Nach Korollar 25.4 der Vorlesung Analysis 1 (was im Wesentlichen der Abelsche Stetigkeitssatz für Potenzreihen ist) folgt dann $\lim_{s\uparrow 1} g'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \mathbb{E}[X]$. Falls der EW von X nicht existiert, gilt $\sum_{k\geq 1} kp_k = \infty$ und damit $\lim_{s\uparrow 1} g'(s) = \infty$. ∎

Bemerkung 8. Analog zeigt man, dass der Erwartungswert von $X(X-1)\cdots(X-k+1)$ genau dann existiert, wenn $g^{(k)}(1-) := \lim_{s\uparrow 1} g^{(k)}(s)$ existiert. In diesem Falle gilt

$$\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-k+1)] = g^{(k)}(1-).$$

Wegen $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] = g''(1-) + g'(1-)$ folgt mit Satz 6.8 (i):

Korollar 7.5. Sei X eine ZVe in $\mathbb{N}_0$ mit Verteilung $\mathbb{P}_X$ und erzeugender Funktion $g = g_{\mathbb{P}_X}$. Falls $\lim_{s\uparrow 1} g''(s)$ existiert, so gilt

$$\mathrm{Var}(X) = g''(1-) + g'(1-) - (g'(1-))^2.$$

Beispiel 7.6. Sei X poissonverteilt zum Parameter $\lambda > 0$. Damit ist $g_{\mathbb{P}_X}(s) = e^{\lambda(s-1)}$ und wir erhalten $\mathbb{E}[X] = \lambda$ und $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Satz 7.7. Sind X, Y unabhängige ZVe in $\mathbb{N}_0$ mit erzeugenden Funktionen $g_X := g_{\mathbb{P}_X}$ und $g_Y := g_{\mathbb{P}_Y}$. Dann gilt für die erzeugende Funktion $g_{X+Y} := g_{\mathbb{P}_{X+Y}}$

$$g_{X+Y}(s) = g_X(s)g_Y(s)$$

für alle s, für die sowohl g_X als auch g_Y definiert ist.

Beweis.
Nach Satz 5.7 sind die Zufallsvariablen s^X und s^Y unabhängig. Es folgt also

$$g_{X+Y}(s) = \mathbb{E}\left[s^{X+Y}\right] = \mathbb{E}\left[s^X \cdot s^Y\right] \overset{6.3(iii)}{=} \mathbb{E}\left[s^X\right]\mathbb{E}\left[s^Y\right] = g_X(s)g_Y(s).$$

∎

Beispiel 7.8. Seien X, Y unabhängige ZVe mit Poissonverteilungen $\mathbb{P}_X = \Pi_\lambda$ und $\mathbb{P}_Y = \Pi_\mu$ zu Parametern $\lambda, \mu > 0$. Dann ist $X + Y$ poissonverteilt zum Parameter $\lambda + \mu$, d.h. es gilt $\mathbb{P}_{X+Y} = \Pi_{\lambda+\mu}$.

Beweis.
Mit Satz 7.7 folgt $g_{X+Y}(s) = \exp(\lambda(s-1))\exp(\mu(s-1)) = \exp((\lambda+\mu)(s-1))$. Dies ist die erzeugende Funktion der $\Pi_{\lambda+\mu}$-Verteilung. Nach Korollar 7.2 ist $X + Y$ damit $\Pi_{\lambda+\mu}$-verteilt. ∎

Beispiel 7.9. Seien X und Y unabhängige Zufallsvariable mit Binomialverteilungen $\mathbb{P}_X = b_{n,p}$ und $\mathbb{P}_Y = b_{m,p}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ und gemeinsamem $p \in [0, 1]$. Dann ist $X + Y$ binomialverteilt zu den Parametern $n + m$ und p, d.h. es gilt $\mathbb{P}_{X+Y} = b_{n+m,p}$.

Beweis.
Kann analog zu Beispiel 7.8 geführt werden. ∎

L3: Bemerkung für L3-Studierende: Geben Sie eine verständnisorientierte Begründung der Aussage in Beispiel 7.9 durch Interpretationen mit passenden Münzwurfexperimenten (ohne Verwendung erzeugender Funktionen).

BSc: Bemerkung für Bachelor-Studierende: Erzeugende Funktionen transformieren Verteilungen auf $\mathbb{N}_0$ in reelle Funktionen. Allgemein werden bei Transformationen mathematische Objekte auf Funktionen abgebildet. Aus analytischen Eigenschaften dieser Funktion soll dann auf Eigenschaften der Objekte geschlossen werden (hier etwa, bei erzeugenden Funktionen, von Ableitungen auf Erwartungswert und Varianz). Eine prominente Transformation ist die Fourier-Transformation, die in verschiedenen Gebieten der Mathematik (und anderen MINT-Fächern) verwendet wird. Techniken, die auf Transformationen beruhen, ergeben, falls sie anwendbar sind, häufig präzise Ergebnisse. Dabei fehlt jedoch oft zunächst das Verständnis, weshalb die durch pure Rechnung bewiesenen Aussagen wahr sind.

2 Allgemeine Modelle

In diesem Kapitel werden nun auch Wahrscheinlichkeitsräume definiert und untersucht, die nicht abzählbar zu sein brauchen.

8 Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Definition 8.1. Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Ein System (Familie) $\mathfrak{A}$ von Teilmengen von Ω heißt σ-Algebra (über Ω), falls gelten:

(a) $\Omega \in \mathfrak{A}$,

(b) $\forall A \in \mathfrak{A} : A^c \in \mathfrak{A}$,

(c) Für jede Folge $(A_i)_{i\geq 1}$ in $\mathfrak{A}$ gilt $\bigcup_{i\geq 1} A_i \in \mathfrak{A}$.

Lemma 8.2. Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra. Dann gilt

(a) $\emptyset \in \mathfrak{A}$.

(b) Ist $(A_i)_{i\geq 1}$ eine Folge in $\mathfrak{A}$, so gilt $\bigcap_{i\geq 1} A_i \in \mathfrak{A}$.

(c) Seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$, so gilt $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathfrak{A}$ und $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathfrak{A}$.

Beweis.

(a) $\emptyset = \Omega^c$,

(b) $\bigcap_{i\geq 1} A_i = \left(\bigcup_{i\geq 1} A_i^c\right)^c$,

(c) $A_1 \cap \ldots \cap A_n = A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap \Omega \cap \Omega \cap \ldots \in \mathfrak{A}$,
$A_1 \cup \ldots \cup A_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots \in \mathfrak{A}$.

∎

Beispiel 8.3.

- Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, so ist $\mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra.
- Sei $A \subset \Omega$, so ist $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ eine σ-Algebra.
- Sei $\Omega' \subset \Omega$ und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Dann ist $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cap \Omega' := \{A \cap \Omega' : A \in \mathfrak{A}\}$ eine σ-Algebra über Ω'. Sie heißt die Spur von $\mathfrak{A}$ in Ω' (Übung).
- Seien $\mathfrak{A}_i$ σ-Algebren über Ω für $i \in I$ mit beliebiger Indexmenge $I \neq \emptyset$. Dann ist $\bigcap_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ σ-Algebra über Ω.

  Beweis.

  $\Omega \in \mathfrak{A}_i$ für alle $i \in I$, also $\Omega \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{A}_i$. Für $A \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ gilt $A \in \mathfrak{A}_i$ für alle $i \in I$. Damit ist auch $A^c \in \mathfrak{A}_i$ für alle $i \in I$, also $A^c \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{A}_i$. Sei $(A_j)_{j\geq 1}$ eine Folge in $\bigcap_{i\in I} \mathfrak{A}_i$. Dann ist $(A_j)_{j\geq 1}$eine Folge in $\mathfrak{A}_i$ für alle $i \in I$. Somit ist $\bigcup_{j\geq 1} A_j \in \mathfrak{A}_i$ für alle $i \in I$, also $\bigcup_{j\geq 1} A_j \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{A}_i$. ∎

Satz 8.4. Sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{F}$ eine beliebige Familie von Teilmengen von Ω. Dann existiert genau eine kleinste σ-Algebra $\mathfrak{A}(\mathcal{F})$, die $\mathcal{F}$ enthält (d.h. $\mathcal{F} \subset \mathfrak{A}(\mathcal{F})$). Dabei heißt $\mathfrak{A}(\mathcal{F})$ die *von $\mathcal{F}$ erzeugte σ-Algebra* und $\mathcal{F}$ *Erzeuger* von $\mathfrak{A}(\mathcal{F})$.

Beweis.
Es existiert mindestens eine σ-Algebra $\mathfrak{A}$ mit $\mathcal{F} \subset \mathfrak{A}$ (etwa $\mathfrak{A} = \mathcal{P}(\Omega)$). Sei $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ die Familie aller σ-Algebren $\mathfrak{A}_i$ mit $\mathcal{F} \subset \mathfrak{A}_i$. Wir setzen $\mathfrak{A}(\mathcal{F}) := \bigcap_{i\in I} \mathfrak{A}_i$. Offenbar gilt $\mathcal{F} \subset \mathfrak{A}(\mathcal{F})$ und $\mathfrak{A}(\mathcal{F})$ ist nach dem vorigen Beispiel eine σ-Algebra. Jede $\mathcal{F}$ enthaltende σ-Algebra ist beim Durchschnitt $\bigcap_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ zugelassen. Damit ist $\mathfrak{A}(\mathcal{F})$ kleinstmöglich. ∎

Beispiel 8.5. Sei $\Omega = \mathbb{R}^d$. Für $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a = (a_1, \ldots, a_d)$ und $b = (b_1, \ldots, b_d)$ bezeichne

$$[a, b) := [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_d, b_d) = \left\{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_i \leq x_i < b_i \text{ für } i = 1, \ldots, d\right\}.$$

Derartige Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ heißen halboffen, $\mathcal{F} = \{[a, b) \subset \mathbb{R}^d : a, b \in \mathbb{R}^d\}$ ist die Menge der halboffenen Intervalle des $\mathbb{R}^d$.

Definition 8.6. Die σ-Algebra $\mathfrak{B}^d := \mathfrak{A}(\mathcal{F})$ über $\mathbb{R}^d$ mit $\mathcal{F} = \{[a, b) \subset \mathbb{R}^d : a, b \in \mathbb{R}^d\}$ heißt *Borelsche σ-Algebra* im $\mathbb{R}^d$. Die Mengen von $\mathfrak{B}^d$ heißen *Borelsche Mengen* oder Borelmengen. Es bezeichne $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}^1$.

Bemerkung 9. Alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen des $\mathbb{R}^d$ sind Borelmengen.

Definition 8.7. Ein *messbarer Raum* ist ein Paar $(\Omega, \mathfrak{A})$ bestehend aus einer nichtleeren Menge Ω und einer σ-Algebra über Ω. Ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbb{P}$ auf $\mathfrak{A}$ ist eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathfrak{A} \to [0, 1]$ mit

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

(ii) $\mathbb{P}$ ist σ-additiv, d.h. für jede Folge $(A_i)_{i\geq 1}$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{A}$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ heißt (allgemeiner) W-Raum, $\mathbb{P}$ auch W-Verteilung, die Elemente von $\mathfrak{A}$ heißen Ereignisse.

Satz 8.8. Die Aussagen und Begriffe aus Lemma 1.2, Lemma 1.3, Definition 3.2 sowie Lemma/Satz 3.4–3.11 für diskrete W-Räume gelten auch für allgemeine W-Räume.

Definition 8.9. Sei $\mathbb{P}$ eine W-Verteilung auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Dann heißt

$$F : \mathbb{R} \to [0, 1], \quad x \mapsto \mathbb{P}\left((-\infty, x)\right)$$

Verteilungsfunktion von $\mathbb{P}$.

Lemma 8.10. Sei F die Verteilungsfunktion einer W-Verteilung $\mathbb{P}$ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Dann gelten:

a) F ist monoton wachsend.

b) F ist linksseitig stetig.

c) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

d) $\mathbb{P}$ ist durch F eindeutig festgelegt.

Beweis.

a) Für $x \leq y$ gilt wegen der Monotonie des W-Maßes $F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x)) \leq \mathbb{P}((-\infty, y)) = F(y)$.

b) Sei $(z_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $z_n \uparrow z \in \mathbb{R}$. Dann definiert $A_n := (-\infty, z_n)$ eine aufsteigende Folge von Ereignissen in $\mathfrak{B}$ mit $\bigcup_{n\geq 1} A_n = (-\infty, z)$. Die Stetigkeit von unten (vgl. Lemma 1.3) liefert $\lim_{n\to\infty} F(z_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((-\infty, z)) = F(z)$, also ist F linksseitig stetig.

c) Mit $A_n := (-\infty, -n)$ ist eine absteigende Folge von Ereignissen mit $\bigcap_{n\geq 1} A_n = \emptyset$ definiert. Die Stetigkeit von oben liefert $\lim_{n\to\infty} F(-n) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Wegen der Monotonie von F gilt damit $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$. Analog folgt mit $A_n := (-\infty, n)$, dass $\lim_{n\to\infty} F(n) = \mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$.

d) Jede Verteilung auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ wird durch ihre Werte auf $\mathcal{F} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}^d\}$ bereits vollständig festgelegt. (Dies ist ein maßtheoretischer Satz, der „Eindeutigkeitssatz“, der hier ohne Beweis verwendet wird.) Speziell für $d = 1$ folgt:

$$\mathbb{P}([a, b)) = \mathbb{P}((-\infty, b) \setminus (-\infty, a)) = \mathbb{P}((-\infty, b)) - \mathbb{P}((-\infty, a)) = F(b) - F(a)$$

für alle $a \leq b$. Also legt F das W-Maß $\mathbb{P}$ fest.

∎

Bemerkung 10. Jede monoton wachsende, linksseitig stetige Funktion $G : \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit $\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} G(x) = 1$ heißt Verteilungsfunktion und definiert vermöge $\mathbb{P}([a, b)) = F(b) - F(a)$ eine eindeutige W-Verteilung auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. (Die Existenz von $\mathbb{P}$ ist nichttrivial und wird hier nicht bewiesen.)

Ein wichtiger Spezialfall sind Verteilungen mit Dichten: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ eine nichtnegative Funktion mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1. \tag{12}$$

Dabei soll das Integral definiert sein, etwa $f|_{[a,b]}$ Regelfunktion sein für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Für derartige Funktionen f definiert

$$F(y) := \int_{-\infty}^{y} f(x)\,dx$$

eine Verteilungsfunktion. Für die zugehörige W-Verteilung $\mathbb{P}$ gilt

$$\mathbb{P}([a,b)) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{13}$$

Definition 8.11. Sei $\mathbb{P}$ eine W-Verteilung auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, so dass (12) und (13) für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gelten. Dann heißt f *Dichte* oder *W-Dichte* von $\mathbb{P}$.

Beispiel 8.12. 1) Gleichverteilung auf dem Intervall $[c, d]$: Für $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c < d$ ist

$$f(x) = \frac{1}{d-c}\mathbb{1}_{[c,d]}(x)$$

eine Funktion mit (12). Die zugehörige Verteilung heißt *Gleichverteilung* auf $[c, d]$. Es ist f also die Dichte der Gleichverteilung auf $[c, d]$.

2) Für $\lambda > 0$ ist durch

$$f_\lambda(x) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\lambda e^{-\lambda x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

eine Funktion mit (12) definiert. Die zugehörige Verteilung heißt *Exponentialverteilung zum Parameter* $\lambda > 0$. Es wird später klar werden, dass die Exponentialverteilung ein stetiges Analogon zur geometrischen Verteilung ist. Sie wird etwa verwendet, um die Wartezeit auf den ersten radioaktiven Zerfall zu modellieren, oder allgemeiner für das erste Auftreten unter zufälligen Phänomenen mit „konstanter Rate pro Zeiteinheit“.

3) Für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ ist durch

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

eine Funktion mit (12) gegeben. Die zugehörige Verteilung heißt *Normalverteilung mit Parameter* μ *und* σ^2. Diese bezeichnen wir auch mit $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Speziell heißt $\mathcal{N}(0, 1)$ *Standardnormalverteilung*. Sie wird zur Modellierung von Messfehlern verwendet und zur Approximation von Verteilungen. Dies wird später durch den „Zentralen Grenzwertsatz“ begründet.

Verallgemeinerung auf $\mathbb{R}^d$: Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_0^+$ eine nichtnegative Funktion mit

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = 1, \tag{14}$$

und für $a = (a_1, \ldots, a_d)$, $b = (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ gelte

$$\mathbb{P}([a,b)) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_d}^{b_d} f(x_1, \ldots, x_d)\,dx_d \cdots dx_1. \tag{15}$$

Definition 8.13. Sei $\mathbb{P}$ eine Verteilung auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ und $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_0^+$, so dass (14) und (15) für alle $a, b \in \mathbb{R}^d$ gelten. Dann heißt f Dichte von $\mathbb{P}$.

9 Messbare Abbildungen und ZVe

Im Fall diskreter W-Räume $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ist jede Abbildung $X : \Omega \to \Omega'$ eine ZVe. Wir wollen nun auch im allgemeinen Fall $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, wobei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra, nicht notwendigerweise die Potenzmenge von Ω ist, (reelle) Zufallsvariable X einführen und insbesondere wieder Ereignissen der Form $\{X \leq 7\}$ oder $\{X \text{ gerade}\}$ Wahrscheinlichkeiten zuordnen. Dabei tritt das Problem auf, dass für eine allgemeine σ-Algebra $\mathfrak{A}$ über Ω nicht jedem $A \subset \Omega$ eine W-keit zugeordnet wird.

Definition 9.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ messbare Räume. Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ heißt *messbar*, falls für alle $B \in \mathfrak{A}'$ gilt:

$$f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}.$$

Ist zudem $\mathbb{P}$ ein W-Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ (also $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum), so heißt jede messbare Abbildung $X : \Omega \to \Omega'$ *Zufallsvariable*. Dann definiert $\mathbb{P}_X : \mathfrak{A}' \to [0, 1]$, $B \mapsto \mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}\left(X^{-1}(B)\right)$ eine W-Verteilung auf $(\Omega', \mathfrak{A}')$. Sie heißt W-Verteilung der ZVe X.

Lemma 9.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ messbare Räume und $\mathcal{E} \subset \mathfrak{A}'$ ein Erzeuger von $\mathfrak{A}'$ (d.h. $\mathfrak{A}(\mathcal{E}) = \mathfrak{A}'$). Dann gilt:

$$f : \Omega \to \Omega' \text{ messbar } \Leftrightarrow f^{-1}(E) \in \mathfrak{A} \text{ für alle } E \in \mathcal{E}.$$

Beweis.
„$\Rightarrow$“: klar, da $\mathcal{E} \subset \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}(\mathcal{E})$.
„$\Leftarrow$“: Seien $\mathcal{C} := \mathfrak{A}\left(\{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{E}\}\right)$, $\mathcal{D} = \{B \in \mathfrak{A}' : f^{-1}(B) \in \mathcal{C}\}$. Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{C} \subset \mathfrak{A}$. Wir zeigen unten, dass $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra ist. Wegen $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ folgt $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}$. Für $B \in \mathfrak{A}'$ beliebig gilt damit $B \in \mathcal{D}$, also $f^{-1}(B) \in \mathcal{C}$ und wegen $\mathcal{C} \subset \mathfrak{A}$ dann $f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$. Es bleibt damit zu zeigen, dass $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra über Ω' ist:

(i) $f^{-1}(\Omega') = \Omega \in \mathcal{C}$, also $\Omega' \in \mathcal{D}$.

(ii) Sei $B \in \mathcal{D}$. Dann gilt $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c \in \mathcal{C}$, also $B^c \in \mathcal{D}$.

(iii) Sei $(B_i)_{i \geq 1}$ eine Folge in $\mathcal{D}$. Dann ist

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \geq 1} B_i\right) = \bigcup_{i \geq 1} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{C},$$

also $\bigcup_{i \geq 1} B_i \in \mathcal{D}$.

∎

Lemma 9.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen (bez. $\mathfrak{B}$) für $i = 1, \ldots, d$. Dann ist $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_d(x))$ messbar (bez. $\mathfrak{B}^d$).

Beweis.
Für $a = (a_1, \dots, a_d)$, $b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ gilt $f^{-1}([a,b)) = \bigcap_{i=1}^{d} f_i^{-1}([a_i, b_i)) \in \mathfrak{A}$, da $f_1, \dots, f_d$ messbar sind. Da die halboffenen Intervalle einen Erzeuger von $\mathfrak{B}^d$ bilden, folgt die Behauptung aus Lemma 9.2. ∎

Lemma 9.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}), (\Omega', \mathfrak{A}'), (\Omega'', \mathfrak{A}'')$ messbare Räume, $f : \Omega \to \Omega', g : \Omega' \to \Omega''$ messbare Abbildungen. Dann ist $g \circ f$ messbar.

Beweis.
Für $B \in \mathfrak{A}''$ ist $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(B)}_{\in \mathfrak{A}'}) \in \mathfrak{A}$, da f, g messbar sind. ∎

Von besonderem Interesse sind messbare Funktionen mit Wertebereich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^d$. Wenn nicht anders angegeben, seien $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^d$ stets mit der Borelschen σ-Algebra $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}^d$ versehen.

Bemerkung 11. Es ist leicht zu sehen (hier ohne Beweis), dass die Borelsche σ-Algebra neben den halboffenen Intervallen auch von den offenen Mengen des $\mathbb{R}^d$ erzeugt wird.

Lemma 9.5. Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ stetig. Dann ist f messbar (jeweils bez. der Borelschen σ-Algebren $\mathfrak{B}^d$ und $\mathfrak{B}^{d'}$).

Beweis.
Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen sind offen. Das System offener Mengen des $\mathbb{R}^{d'}$ bildet einen Erzeuger von $\mathfrak{B}^{d'}$. Aus Lemma 9.2 folgt die Behauptung. ∎

Lemma 9.6. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen für $i \in \mathbb{N}$ sowie $(\alpha_i)_{i \geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann sind

$$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n, \quad f_1 \cdots f_n, \quad \inf_{i \in \mathbb{N}} f_i, \quad \sup_{i \in \mathbb{N}} f_i, \quad \liminf_{i \to \infty} f_i, \quad \limsup_{i \to \infty} f_i$$

messbare Funktionen mit Wertebereich $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$.

Beweis.
Sei $f := (f_1, \dots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Abbildung $g(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$. Nach Lemma 9.3 ist f messbar, nach Lemma 9.5 ist g messbar, nach Lemma 9.4 ist $g \circ f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$ messbar. Ebenso folgt die Messbarkeit des Produkts.
Das System $\{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$ bildet einen Erzeuger von $\mathfrak{B}$, denn $[a,b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a)$. Wir haben

$$\left\{ \inf_{i \geq 1} f_i \in (-\infty, x) \right\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{f_i \in (-\infty, x)\} \in \mathfrak{A}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach Lemma 9.2 ist $\inf f_i$ messbar. Die restlichen Behauptungen folgen ähnlich. ∎

Definition 9.7. Seien $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_d$ W-Verteilungen auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Eine Verteilung $\mathbb{P}$ auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ heißt das *Produkt der Verteilungen* $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_d$, falls für alle $a = (a_1, \ldots, a_d)$, $b = (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\mathbb{P}([a, b)) = \prod_{i=1}^{d} \mathbb{P}_i([a_i, b_i)).$$

Bezeichnung: $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_d$.

Für reellwertige ZVe $X : \Omega \to \mathbb{R}$ oder Zufallsvektoren $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ wird im Folgenden stets $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ bzw. $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ als messbarer Bildraum zugrunde gelegt.

Definition 9.8. Seien $X_1, \ldots, X_d$ reellwertige ZVe auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ und $(X_1, \ldots, X_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$. Dann heißt $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{(X_1, \ldots, X_d)}$ die *gemeinsame Verteilung* von $X_1, \ldots, X_d$.

Definition 9.9. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$ messbare Räume und $X_i : \Omega \to \Omega_i$ ZVe für $i \in I \neq \emptyset$. Die Familie von ZVen $\{X_i : i \in I\}$ heißt unabhängig, falls für jede Wahl $B_i \in \mathfrak{A}_i$ die Familie $\{\{X_i \in B_i\} : i \in I\}$ unabhängig ist (vgl. Definition 3.8).

Für reellwertige ZVe gilt folgende Charakterisierung der Unabhängigkeit.

Satz 9.10. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $X_1, \ldots, X_d$ reellwertige ZVe auf Ω. Dann gilt:

$$X_1, \ldots, X_d \text{ unabhängig } \Leftrightarrow \mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_d} = \mathbb{P}_{(X_1, \ldots, X_d)}.$$

Beweis.
"⇒": Für die Gleichheit von Verteilungen auf $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$ genügt, die Gleichheit auf $\mathcal{F} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}^d\}$ zu zeigen, vgl. den Beweis von Lemma 8.10 (d). Für $a = (a_1, \ldots, a_d)$, $b = (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_d}([a, b)) = \prod_{i=1}^{d} \mathbb{P}_{X_i}([a_i, b_i)) = \prod_{i=1}^{d} \mathbb{P}(\{X_i \in [a_i, b_i)\}) \\
&\overset{(*)}{=} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{d} \{X_i \in [a_i, b_i)\}\right) = \mathbb{P}((X_1, \ldots, X_d) \in [a, b)) = \mathbb{P}_{(X_1, \ldots, X_d)}([a, b)),
\end{aligned}$$

wobei für $(*)$ die Voraussetzung der Unabhängigkeit verwendet wird.
„⇐": Seien $B_1, \ldots, B_d \in \mathfrak{B}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{d} \{X_i \in B_i\}\right) &= \mathbb{P}((X_1, \ldots, X_d) \in B_1 \times \cdots \times B_d) \\
&\overset{(**)}{=} \prod_{i=1}^{d} \mathbb{P}_{X_i}(B_i) = \prod_{i=1}^{d} \mathbb{P}(\{X_i \in B_i\}),
\end{aligned}$$

wobei für $(**)$ die Voraussetzung verwendet wird. Also sind $X_1, \ldots, X_d$ unabhängig. ∎

Lemma 9.11. Seien $X_1, \dots, X_d$ unabhängige reellwertige ZVe, $\mathbb{P}_{X_i}$ habe Dichte f_i für $i = 1, \dots, d$ und es sei $X = (X_1, \dots, X_d)$. Dann hat $\mathbb{P}_X$ die Dichte

$$f : (x_1, \dots, x_d) \mapsto \prod_{i=1}^{d} f_i(x_i).$$

Beweis.
Für $a = (a_1, \dots, a_d), b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_X([a,b)) &\overset{(\spadesuit)}{=} \prod_{i=1}^{d} \mathbb{P}_{X_i}([a_i, b_i)) = \prod_{i=1}^{d} \int_{a_i}^{b_i} f(x_i)\,dx_i \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_d}^{b_d} f_1(x_1) \cdots f_d(x_d)\,dx_d \cdots dx_1,\end{aligned}$$

wobei für (♠) Satz 9.10 verwendet wurde. Nach Definition 8.13 ergibt diese Darstellung gerade die Behauptung. ∎

Satz 9.12. Seien X_1, X_2 unabhängige, reelle ZVe auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit Dichten f_1 und f_2. Dann hat $X_1 + X_2$ die Dichte

$$f_1 * f_2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u - v) f_2(v)\,dv, \quad u \in \mathbb{R}.$$

$f_1 * f_2$ heißt *Faltung* von f_1 und f_2.

Beweis.
Sei $s \in \mathbb{R}$ und $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \le s\}$. Dann gilt mit der Substitution $u = x_1 + x_2$:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_1 + X_2 \le s) = \mathbb{P}_{(X_1,X_2)}(B) = \int_B f_1(x_1) f_2(x_2)\,d(x_1, x_2) \\ &= \int_{\{(x_1,x_2)\,|\,x_1+x_2\le s\}} f_1(x_1) f_2(x_2)\,d(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{s-x_2} f_2(x_2) f_1(x_1)\,dx_1\,dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x_2) \int_{-\infty}^{s} f_1(u - x_2)\,du\,dx_2 = \int_{-\infty}^{s} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u - x_2) f_2(x_2)\,dx_2\,du.\end{aligned}$$

Damit folgt für alle $s < t$

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 \in [s,t)) = \int_s^t \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u - v) f_2(v)\,dv\,du.$$

Nach Definition 8.11 ist damit der innere Integrand $u \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u - v) f_2(v)\,dv$ Dichte von $X_1 + X_2$. ∎

10 Erwartungswerte und höhere Momente

Sei X eine diskrete ZVe mit Werten $\{x_1, x_2, \ldots\}$ und existierendem Erwartungswert. Dann gilt $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{P}(\{X = x_i\})$. In allgemeinen W-Räumen kann der EW durch einen Grenzübergang aus dem EW für den diskreten Fall gewonnen werden: Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine ZVe mit (allgemeinem) W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ und Bildraum $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Dann setze man etwa für alle $n \geq 1$

$$A_{nk} := \left\{ \frac{k}{n} \leq X < \frac{k+1}{n} \right\} \text{ für } k \in \mathbb{Z}$$

und approximieren X durch die diskrete ZVe

$$X_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{n} \mathbb{1}_{A_{nk}}, \quad n \geq 1.$$

Es gilt dann $X_n \leq X \leq X_n + \frac{1}{n}$. Falls die EWe der X_n existieren, so gilt $|\mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[X_m]| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, d.h. $(\mathbb{E}[X_n])_{n \geq 1}$ ist eine Cauchy-Folge und damit konvergent in $\mathbb{R}$. In diesem Fall setzt man

$$\mathbb{E}[X] := \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[X_n]. \tag{16}$$

Andere Schreibweisen sind $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]$ oder $\int X \, d\mathbb{P}$.

Bemerkung 12. Man beachte, dass sich die Vorgehensweise von der Definition von Riemann-Integralen oder Integralen von Regelfunktionen dahingehend prinzipiell unterscheidet, dass nicht der Urbildraum, sondern der Bildraum (äquidistant) unterteilt wird. Dies entspricht dem Vorgehen zur Definition des Lebesgue-Integrals.

Da sich Grenzwerte der Form (16) nur selten explizit berechnen lassen, ist für praktische Zwecke folgender Zusammenhang zentral, den man auch als Definition des Erwartungswerts direkt verwenden könnte.

Satz 10.1. Sei X eine reellwertige ZVe, deren Verteilung $\mathbb{P}_X$ eine Dichte f besitze, die bis auf endlich viele Stellen stetig sei. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert der EW von $g(X)$ genau dann, wenn $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) \, dx < \infty$, und in diesem Fall gilt

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) \, dx.$$

Beweisskizze.
Zu $\delta > 0$ existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $x_n \to \infty$ für $n \to \infty$, $x_n \to -\infty$ für $n \to -\infty$ und $|g(x) - g(x_n)| \leq \delta$ für alle $x_n \leq x \leq x_{n+1}$. Sei $g_\delta(x) := g(x_n)$ für alle $x \in [x_n, x_{n+1})$. Damit ist eine Treppenfunktion g_δ definiert mit $|g_\delta(x) - g(x)| \leq \delta$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da $g_\delta(X)$ eine diskrete ZVe ist gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g_\delta(X)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(x_n) \mathbb{P}(X \in [x_n, x_{n+1})) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(x_n) \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) \, dx \xrightarrow{\delta \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) \, dx, \end{aligned}$$

falls dieses Integral existiert, d.h. falls $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|f(x)\,dx < \infty$. ∎

Bemerkung 13. Es handelt sich hierbei nur um eine Beweisskizze, da in der Definition (16) die Unabhängigkeit des Grenzwerts von der verwendeten approximierenden Folge gezeigt werden müsste.

BSc: Bemerkung für Bachelor-Studierende: Die Schwierigkeiten der Definition des Erwartungswerts in (16) sowie des Nachweises von Satz 10.1 sowie der Tatsache, dass im vorliegenden Skript letztlich nur Erwartungswerte für diskrete Zufallsvariable sowie für Zufallsvariable mit Dichten berechnet werden können, liegen darin begründet, dass auf die Verwendung des Lebesgue-Integrals hier verzichtet wird. Das Lebesgue-Integral wird in der Vorlesung „Integrationstheorie“ im dritten Semester entwickelt. Steht das Lebesgue-Integral zur Verfügung, so wird für eine reelle Zufallsvariable X auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ zwecks Definition ihres Erwartungswerts als reelle, messbare Funktion interpretiert. Ist X dann nichtnegativ oder integrierbar (also Lebesgue-integrierbar bez. $\mathbb{P}$), so wird

$$\mathbb{E}[X] := \int X\,d\mathbb{P}$$

erklärt, wobei auf der rechten Seite das Lebesgue-Integral steht. Dies ist dann nicht nur auf den Fall diskreter Zufallsvariable oder auf Zufallsvariablen mit Dichten beschränkt, sondern liefert den Erwartungswert für beliebige nichtnegative oder $\mathbb{P}$-integrierbare Zufallsvariable.

Korollar 10.2. Für eine reellwertige ZVe X, deren Verteilung eine Dichte f besitzt mit $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)\,dx < \infty$, existiert der EW und es gilt

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx.$$

Beispiel 10.3. Sei X gleichverteilt auf $[c, d]$, d.h. $\mathbb{P}_X$ habe Dichte $x \mapsto \frac{1}{d-c}\mathbb{1}_{[c,d]}(x)\,dx$. Dann folgt mit Korollar 10.2

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{d-c}\mathbb{1}_{[c,d]}(x)\,dx = \frac{1}{d-c}\int_c^d x\,dx = \frac{1}{d-c}\frac{d^2-c^2}{2} = \frac{d+c}{2}.$$

Definition 10.4. Sei X eine reellwertige ZVe mit Dichte f und $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^m f(x)\,dx < \infty$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann heißt

$$\mathbb{E}[X^m] = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x)\,dx \qquad m\text{-tes Moment der ZVe } X,$$

$$\mathbb{E}[|X|^m] = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^m f(x)\,dx \qquad m\text{-tes absolutes Moment der ZVe } X.$$

Hat X ein endliches zweites Moment (d.h. existiert der EW von X^2), so heißt

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f(x)\,dx$$

Varianz von X.

Lemma 10.5. Die Rechenregeln für den Erwartungswert aus den Sätzen 6.3 und 6.6 und für die Varianz aus den Sätzen 6.8 und 6.9 gelten auch für allgemeine reellwertige ZVe.

Satz 10.6 (Jensensche Ungleichung)**.** Seien X eine reellwertige ZVe und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein konvexe Funktion, so dass die EWe von X und $f \circ X$ existieren. Dann gilt

$$\mathbb{E}[f \circ X] \geq f(\mathbb{E}[X]).$$

Beweis.
Sei f konvex, d.h. es gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in [0,1] : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

An jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert eine Stützgerade $x \mapsto ax + b$, d.h. $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = ax_0 + b$ und $f(x) \geq ax + b$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir wählen $x_0 = \mathbb{E}[X]$. Dann folgt

$$f(E[X]) = a\mathbb{E}[X] + b = \mathbb{E}[aX + b] \leq \mathbb{E}[f(X)].$$

∎

Beispiel 10.7.

- $x \mapsto |x|$ ist konvex, also gilt $|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|]$, falls $\mathbb{E}[|X|]$ existiert.
- $x \mapsto |x|^p$ ist für $p \geq 1$ konvex, also gilt $|\mathbb{E}[X]|^p \leq \mathbb{E}[|X|^p]$.

Lemma 10.8 (Eigenschaften von Momenten)**.** Seien X, Y reellwertige ZVe.

a) $|X|^r$ habe EW für ein $r > 0$. Dann hat $|X|^s$ EW für alle $0 < s \leq r$.

b) Es gilt
$$\mathbb{E}[|X+Y|^r] \leq \begin{cases} 2^{r-1}(\mathbb{E}[|X|^r] + \mathbb{E}[|Y|^r]) & \text{für } r \geq 1, \\ \mathbb{E}[|X|^r] + \mathbb{E}[|Y|^r] & \text{für } 0 < r \leq 1. \end{cases}$$
Insbesondere ist
$$\mathcal{L}_r(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) := \{X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ ZV} : |X|^r \text{ hat EW}\}$$
für $r > 0$ ein Vektorraum.

c) Es gilt $(\mathbb{E}[|X|^s])^{1/s} \leq (\mathbb{E}[|X|^r])^{1/r}$ für alle $0 < s \leq r$, falls $|X|^r$ einen EW hat.

Beweis.

a) Es gilt $|X|^s \leq 1 + |X|^r \Rightarrow \mathbb{E}[|X|^s] \leq 1 + \mathbb{E}[|X|^r] < \infty$.

b) Falls $r \geq 1$, so ist $x \mapsto |x|^r$ konvex. Damit ist $\left|\frac{x+y}{2}\right|^r \leq \frac{1}{2}(|x|^r + |y|^r)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Also $\mathbb{E}[|X+Y|^r] \leq 2^{r-1}(\mathbb{E}[|X|^r] + \mathbb{E}[|Y|^r])$. Falls $0 < r \leq 1$, so gilt $(a+b)^r \leq a^r + b^r$ für alle $a, b \geq 0$. Dies liefert die Behauptung im Fall $0 < r \leq 1$.

c) $x \mapsto |x|^{r/s}$ ist konvex. Die Jensensche Ungleichung angewandt auf $|X|^s$ liefert

$$\mathbb{E}\left[(|X|^s)^{r/s}\right] \geq (\mathbb{E}\,[|X|^s])^{r/s}, \text{ also } (\mathbb{E}\,[|X|^r])^{1/r} \geq (\mathbb{E}\,[|X|^s])^{1/s}.$$

∎

Satz 10.9 (Cauchy–Schwarzsche Ungleichung)**.** Für beliebige $X, Y \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ gilt

$$(\mathbb{E}\,[XY])^2 \leq \mathbb{E}\left[X^2\right]\mathbb{E}\left[Y^2\right].$$

Beweis.
Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $0 \leq \mathbb{E}\,[(\lambda X - Y)^2] = \lambda^2\mathbb{E}\,[X^2] - 2\lambda\mathbb{E}\,[XY] + \mathbb{E}\,[Y^2]$. Speziell für $\lambda = \mathbb{E}\,[XY]/\mathbb{E}\,[X^2]$ ergibt sich

$$0 \leq \frac{(\mathbb{E}\,[XY])^2}{\mathbb{E}\,[X^2]} - 2\frac{(\mathbb{E}\,[XY])^2}{\mathbb{E}\,[X^2]} + \mathbb{E}\,[Y^2] \Rightarrow (\mathbb{E}\,[XY])^2 \leq \mathbb{E}\,[X^2]\mathbb{E}\,[Y^2].$$

∎

Satz 10.10 (Paley–Zygmund Ungleichung)**.** Für nichtnegative Zufallsvariable $X \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ und $0 \leq \vartheta \leq 1$ gilt

$$\mathbb{P}(X > \vartheta\mathbb{E}\,[X]) \geq (1-\vartheta)^2\frac{\mathbb{E}\,[X]^2}{\mathbb{E}\,[X^2]}.$$

Beweis.
Es ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,[X] &= \mathbb{E}\,[X\mathbb{1}_{\{X \leq \vartheta\mathbb{E}\,[X]\}}] + \mathbb{E}\,[X\mathbb{1}_{\{X > \vartheta\mathbb{E}\,[X]\}}] \\ &\leq \vartheta\mathbb{E}\,[X] + \mathbb{E}\,[X^2]^{1/2}\mathbb{P}(X > \vartheta\mathbb{E}\,[X])^{1/2},\end{aligned}$$

wobei in der Abschätzung des zweiten Summanden die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung (Satz 10.9) verwendet wurde. Auflösen liefert die Behauptung. ∎

Bemerkung 14. a) Für $0 < s \leq r$ gilt $\mathcal{L}_r(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{L}_s(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

b) Für $r \geq 1$ und $X \in \mathcal{L}_r(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ definiert $\|X\|_r := (\mathbb{E}\,[|X|^r])^{1/r}$ eine Semi-Norm auf $\mathcal{L}_r(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Es gilt $\|X\|_s \leq \|X\|_r$ für $1 \leq s \leq r$.

c) Für $X, Y \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ und $\langle X, Y\rangle := \mathbb{E}\,[XY]$ liest sich die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung $\langle X, Y\rangle \leq \|X\|_2\|Y\|_2$.

L3: Bemerkung für L3-Studierende: Der Erwartungswert für Zufallsvariable mit Dichten betrifft die Themenfelder der Qualifikationsphase Q3.3 mit erhöhtem Niveau (Leistungskurs).

3 Summen unabhängiger Zufallsvariablen

In einem fairen Spiel zwischen zwei Spielern werde vielfach unabhängig eine Münze geworfen. Bei Kopf erhält jeweils Spieler A einen vorgegebenen Einsatz $E > 0$ von Spieler B, bei Zahl erhält Spieler B den Einsatz E von Spieler A. Was kann man über den Gewinn von Spieler A asymptotisch sagen, wenn das Spiel sehr lange dauert?
Wir modellieren dies wie folgt: Es sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge unabhängiger ZVen mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_i = -1)$. Das Ereignis $\{X_i = 1\}$ bedeute, dass Spieler A im i-ten Spiel gewinnt. Dann ist der Gewinn von Spieler A gegeben durch

$$S_n = E \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

falls n Spiele gespielt werden. Es ist S_n also eine Summe unabhängiger ZVe. Summen unabhängiger Zufallsvariablen treten bei der stochastischen Modellierung in zahlreichen Situationen auf. Deshalb untersuchen wir das asymptotische Verhalten solcher Summen. Es zeigt sich dabei, dass der Zufall nichts völlig Willkürliches ist, sondern Gesetzen folgt, die wir im Rahmen mathematischer Modellierungen beweisen können.

11 Die Gesetze großer Zahlen

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Verhalten von S_n/n, wobei S_n eine Summe von n unabhängigen Zufallsvariablen ist. Wir erhalten zwei Konvergenzaussagen, die als schwaches bzw. starkes Gesetz der großen Zahlen bekannt sind. Wir formulieren und vergleichen zunächst die beiden Sätze. Im Anschluss werden Methoden entwicklen (Chebyshev Ungleichung bzw. Lemma von Borel-Cantelli), um diese zu beweisen.

Satz 11.1 (Schwaches Gesetz großer Zahlen)**.** Seien $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge unabhängiger ZVe mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $\mathrm{Var}(X_i) \leq M$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit einer Schranke $M < \infty$. Bezeichne $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{M}{\varepsilon^2 n} \to 0, \quad (n \to \infty).$$

Bemerkung 15. Sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von Bernoulli-Experimenten, die unabhängig mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ ausgeführt werden. Bezeichne $H_n(\omega) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)$ für $\omega \in \Omega$ die relative Anzahl von Erfolgen, siehe Abbildung 1. Das schwache Gesetz großer Zahlen liefert

$$\mathbb{P}(|H_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4\varepsilon^2 n}. \tag{17}$$

Für große n ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die relative Häufigkeit von der Erfolgswahrscheinlichkeit um mehr als ε unterscheidet, also klein.

Definition 11.2. Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von ZVen und X eine ZVe auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Die Folge $(X_n)_{n\geq 1}$ *konvergiert stochastisch* gegen X, falls gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Stochastische Konvergenz bezeichnen wir mit $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Bemerkung 16. Die Aussage des schwachen Gesetzes großer Zahlen ist also $\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$.

Definition 11.3. Seien $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von ZVen und X eine ZVe auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Die Folge $(X_n)_{n\geq 1}$ *konvergiert fast sicher* gegen X, falls

$$\mathbb{P}\left(\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

Fast sichere Konvergenz bezeichnen wir mit $X_n \to X$ f.s.

Satz 11.4. Seien $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von ZVen und X eine ZVe auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Dann gilt mit $n \to \infty$:

$$X_n \to X \text{ f.s. } \Longrightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X.$$

Beweis.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und bezeichne

$$B_N := \{|X_n - X| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N\} = \{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N\}.$$

$(B_N)_{N\geq 1}$ bildet eine aufsteigende Folge von Mengen mit

$$A := \{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} \subset \bigcup_{N\geq 1} B_N.$$

Wegen $\mathbb{P}(A) = 1$ folgt, dass $\mathbb{P}(\bigcup_{N\geq 1} B_N) = 1$, mit der Stetigkeit von unten gilt also $\mathbb{P}(B_N) \to 1$ für $N \to \infty$. Damit gilt $\mathbb{P}(|X_N - X| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(B_N^c) \to 0$ für $N \to \infty$. ∎

Satz 11.5 (Starkes Gesetz großer Zahlen)**.** Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger ZVe mit $\mathbb{E}[X_i^4] \leq M < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbb{E}[X_i]) \to 0 \text{ f.s. für } n \to \infty.$$

Bemerkung 17. Die Voraussetzung endlicher vierter Momente in Satz 11.5 kann zu endlichen ersten absoluten Momenten abgeschwächt werden. Dies erfordert einen aufwendigeren Beweis.

Für den Beweis des schwachen Gesetzes der großen Zahlen werden zwei Ungleichungen bereitgestellt:

Satz 11.6 (Markovsche Ungleichung)**.** Sei $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ monoton wachsend und $\varepsilon > 0$ mit $\varphi(\varepsilon) > 0$. Dann gilt für jede reellwertige ZVe Z

$$\mathbb{P}(|Z| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[\varphi(|Z|)]}{\varphi(\varepsilon)}.$$

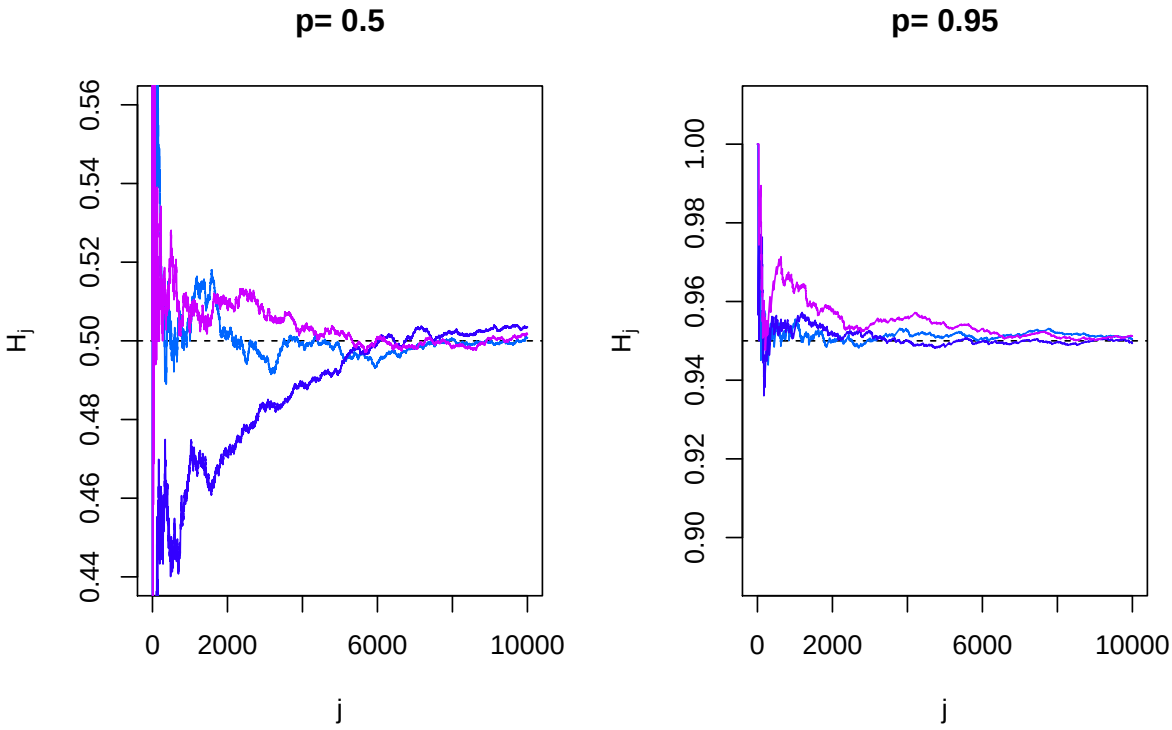


Abbildung 1: Gezeigt sind jeweils Simulationen $(H_j(\omega_i))_{j=1,\ldots,10000}$ für $i = 1, 2, 3$, vgl. Bemerkung 15. Im linken Bild ist $p = \frac{1}{2}$, rechts $p = 0.95$. Zur Simulation wurde folgender R-Code verwendet:

```
n <- 10000
p <- 0.5 # Hier entsprechend 0.95 ersetzen.
m <- 3
plot(0, 0, type="n", xlab="j", ylab=expression(paste(H[j])),
xlim=c(0,n), ylim=c(0,1))
abline(h=p, lty=2)
for (i in 1:m){
    X <- sample(c(1,0), prob=c(p,1-p), replace=TRUE, n)
    S <- cumsum(X)/(1:n)
    lines(S, col=rainbow(m, start=0.6, end=0.8)[i])
              }
```

Beweis.
Für $\omega \in \Omega$ sei

$$Y(\omega) := \begin{cases} \varphi(\varepsilon), & \text{falls } |Z(\omega)| \geq \varepsilon, \\ 0, & \text{falls } |Z(\omega)| < \varepsilon. \end{cases}$$

Dann gilt $Y \leq \varphi(|Z|)$ punktweise. Die Monotonie des EW liefert $\mathbb{E}[\varphi(|Z|)] \geq \mathbb{E}[Y] = \varphi(\varepsilon)\mathbb{P}(|Z| \geq \varepsilon)$. Dies ist die Behauptung. ∎

Bemerkung 18. Falls der EW von $\varphi(|Z|)$ nicht existiert, wird $\mathbb{E}[\varphi(|Z|)] = \infty$ gesetzt, die Behauptung gilt dann trivialerweise. Eine Abschätzung in die andere Richtung liefert die Paley–Zygmund Ungleichung, siehe Satz 10.10.

Korollar 11.7 (Chebyshevsche Ungleichung)**.** Sei X eine reellwertige ZVe mit $\mathrm{Var}(X) < \infty$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Beweis.
Sei $Z := X - \mathbb{E}[X]$ und $\varphi(x) := x^2$. Dann liefert die Markovsche Ungleichung

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|Z| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[\varphi(|Z|)]}{\varphi(\varepsilon)} = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Dies ist die Behauptung. ∎

Beweis von Satz 11.1.
Bezeichne $X := \frac{1}{n} S_n$. Dann gilt $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \mu$ und

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{n^2} \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) \leq \frac{M}{n},$$

wobei Satz 6.8 und der Satz von Bienaymé 6.9 verwendet werden. Die Chebyshevsche Ungleichung liefert

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n} S_n - \mu \right| \geq \varepsilon \right) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} \leq \frac{M}{\varepsilon^2 n} \to 0.$$

Dies ist die Behauptung. ∎

Für den Beweis des starken Gesetzes großer Zahlen sind folgende Begriffe nützliche:

Definition 11.8. Sei $(A_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von Ereignissen. Dann heißt

$$\limsup_{n \to \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \textit{Limessuperior} \text{ von } (A_n)_{n \geq 1},$$

$$\liminf_{n \to \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \textit{Limesinferior} \text{ von } (A_n)_{n \geq 1}.$$

Bemerkung 19. Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\},$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Satz 11.9 (Lemma von Borel-Cantelli)**.** Sei $(A_k)_{k\geq 1}$ eine Folge von Ereignissen.

a) Falls $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) < \infty$, so gilt

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{k\to\infty} A_k\right) = 0.$$

b) Sind $(A_k)_{k\geq 1}$ eine unabhängige Familie und $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \infty$, so gilt

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{k\to\infty} A_k\right) = 1.$$

Beweis.
Ad a): Es ist $\limsup_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, also für $n \geq 1$

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{k\to\infty} A_k\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$ konvergiert.

Ad b): Die Unabhängigkeit der Ereignisse liefert mit Lemma 3.11 für festes $n \in \mathbb{N}$ und $N > n$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c\right) = \prod_{k=n}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \leq \prod_{k=n}^{N} \exp\left(-\mathbb{P}(A_k)\right) = \exp\left(-\sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k)\right) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$ divergiert. Hierbei wurde die für alle $x \in \mathbb{R}$ gültige Ungleichung $1 + x \leq e^x$ verwendet. Die Stetigkeit von oben liefert also $\mathbb{P}(\bigcap_{k\geq n} A_k^c) = 0$. Die Sub-$\sigma$-Additivität liefert nun

$$\mathbb{P}\left(\left(\limsup_{k\to\infty} A_k\right)^c\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = 0.$$

Es folgt die Behauptung. ∎

Beweis von Satz 11.5.
Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\mathbb{E}[X_i] = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Damit ist zu zeigen, dass $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to 0$ f.s., d.h.

$$\mathbb{P}\left(\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 0\right\}\right) = 1. \tag{18}$$

Wir haben für alle $\omega \in \Omega$, dass

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) = 0 \\
&\Leftrightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq N : \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) \right| \leq \varepsilon \\
&\Leftrightarrow\ \forall\, m \in \mathbb{N}\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq N : \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) \right| \leq \frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

Damit lässt sich das Ereignis in (18) umformulieren in

$$\left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \right\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right| \leq \frac{1}{m} \right\}.$$

Für das Komplement dieses Ereignisses erhalten wir

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right| > \frac{1}{m} \right\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \limsup_{n\to\infty} \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right| > \frac{1}{m} \right\}. \tag{19}$$

Wegen der Subadditivität des W-Maßes reicht es für alle $m \in \mathbb{N}$ zu zeigen, dass

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right| > \frac{1}{m} \right\} \right) = 0.$$

Wegen der Unabhängigkeit der X_i und $\mathbb{E}[X_i] = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l] = 0$, außer $i, j, k, l \in \mathbb{N}$ sind paarweise gleich. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^4 \right] &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{E}[X_i X_j X_k X_\ell] \\
&\leq 3 \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{E}[X_i^2 X_j^2] \overset{(*)}{\leq} 3 \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{E}[X_i^4]^{1/2} \mathbb{E}[X_j^4]^{1/2} \leq 3n^2 M,
\end{aligned}$$

wobei für $(*)$ die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung, Satz 10.9, verwendet wurde. Dies liefert

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right| \geq \varepsilon \right) &= \mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right|^4 \geq \varepsilon^4 \right) \\
&\overset{\text{Satz 11.6}}{\leq} \frac{1}{(\varepsilon n)^4} \mathbb{E}\left[(X_1 + \cdots + X_n)^4 \right] \leq \frac{3M}{\varepsilon^4 n^2}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right| > \frac{1}{m} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3m^4 M}{n^2} < \infty,$$

also nach dem Lemma von Borel-Cantelli 11.9 a)

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right|>\frac{1}{m}\right\}\right)=0.$$

Es folgt die Behauptung. ∎

12 Approximation der Binomialverteilung

Wir betrachten nochmals den Kontostand $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$ von Spieler A (mit Einsatz $E=1$) in Abschnitt 11, wobei $X_1,\dots,X_n$ unabhängig sind und wir hier $\mathbb{P}(X_i=1)=p$, $\mathbb{P}(X_i=-1)=1-p=:q$ annehmen mit $p\in(0,1)$. Mit $B_i:=\frac{1}{2}(X_i+1)$ sind $B_1,\dots,B_n$ die Ausgänge von n unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Wir erhalten

$$S_n=-n+2\sum_{i=1}^{n}B_i.$$

Wir wissen, dass $\sum_{i\le n}B_i$ binomial $b_{n,p}$-verteilt ist. Damit gilt für $a<b$, dass

$$\mathbb{P}\left(S_n\in[a,b]\right)=b_{n,p}\left(\left[\frac{a+n}{2},\frac{b+n}{2}\right]\right).$$

Die Verteilung $\mathbb{P}_{S_n}$ von S_n ist also vollständig beschrieben. Das schwache Gesetz großer Zahlen (auf $B_1,\dots,B_n$ angewandt) liefert dann

$$\forall\,\varepsilon>0:\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}B_i-p\right|\ge\varepsilon\right)\to 0,\quad(n\to\infty)$$

oder äquivalent, dass für alle $\varepsilon>0$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}B_i\in(n(p-\varepsilon),n(p+\varepsilon))\right)\to 1,\quad(n\to\infty).$$

Die Summe $\sum_{0\le i\le n}B_i$ liegt also „mit hoher Wahrscheinlichkeit“ (genauer: mit gegen 1 konvergierender Wahrscheinlichkeit) im Intervall $(n(p-\varepsilon),n(p+\varepsilon))$. Für die Binomialverteilung bedeutet dies für alle $\varepsilon>0$:

$$b_{n,p}\left((n(p-\varepsilon),n(p+\varepsilon))\right)\to 1,\quad(n\to\infty).$$

In diesem Abschnitt soll nun die Binomialverteilung $b_{n,p}$ in diesem Intervall genauer untersucht werden. Wir haben für $k\in\{0,\dots,n\}$

$$b_{n,p}(\{k\})=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Zur Approximation eignet sich die *Stirlingsche Formel*:

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\vartheta(n)}\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

wobei $(12n+1)^{-1} \le \vartheta(n) \le (12n)^{-1}$. Für Folgen $(a_n)_{n\ge1}, (b_n)_{n\ge1}$ werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$a_n \sim b_n :\Longleftrightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 1 \text{ für } n\to\infty \quad \text{(asymptotische Äquivalenz)},$$
$$a_n = o(b_n) :\Longleftrightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 0 \text{ für } n\to\infty \quad \text{(klein-o-Notation)}.$$

Wir betrachten ein von n abhängendes $k = k_n$ mit $\frac{k_n}{n} \to p$ für $n\to\infty$, d.h. insbesondere gilt $k \in (n(p-\varepsilon), n(p+\varepsilon))$ für alle n hinreichend groß. Die Stirlingsche Formel liefert dann

$$\begin{aligned} b_{n,p}(\{k\}) &= \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \sim \left(\frac{n}{2\pi k(n-k)}\right)^{1/2}\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{n}{k(n-k)}\right)^{1/2}\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}, \end{aligned}$$

wobei $q = 1-p$ verwendet wird. Aus $k \sim np$ und $n-k \sim nq$ folgt

$$\left(\frac{n}{k(n-k)}\right)^{1/2} \sim \frac{1}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sigma_n},$$

wobei σ_n^2 die Varianz einer $b_{n,p}$-verteilten ZVe bezeichne (vgl. Beispiel 6.10). Wir haben also

$$b_{n,p}(\{k\}) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} =: \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\chi(n,k). \tag{20}$$

Um $\chi(n,k)$ asymptotisch zu beschreiben, kürzen wir $t = t_n = \frac{k_n}{n} = \frac{k}{n}$ ab. Dann gilt

$$-\ln\chi(n,k) = n\left\{t\ln\frac{t}{p} + (1-t)\ln\frac{1-t}{q}\right\} =: ng(t). \tag{21}$$

Die Funktion g spielt auch in anderen Untersuchungen der Binomialverteilung eine wesentliche Rolle, sie heißt *Ratenfunktion* der Binomialverteilung $b_{n,p}$. Wir betrachten die Taylorentwicklung von g um p: Es ist $g(p) = 0$, $g'(p) = 0$, $g''(p) = \frac{1}{pq}$, also

$$g(t) = \frac{1}{2pq}(t-p)^2 + \psi(t-p),$$

wobei der Restterm ψ die Abschätzung $|\psi(t-p)| \le C|t-p|^3$ für eine passende Konstante $C > 0$ in einer Umgebung von p erfüllt. Nehmen wir nun für $t = t_n$ die stärkere Annahme

$$n(t-p)^3 \to 0 \text{ für } n\to\infty \tag{22}$$

an, so folgt $n\psi(t-p) \to 0$ und damit in (21):

$$\left|-\ln\chi(n,k) - n\frac{(t-p)^2}{2pq}\right| \to 0.$$

Mit der Abkürzung

$$x(n,k) := \frac{k-np}{\sigma_n} \tag{23}$$

folgt also

$$\left| -\ln \chi(n,k) - \frac{x(n,k)^2}{2} \right| \to 0 \text{ für } n \to \infty. \tag{24}$$

Die Bedingung (22) bedeutet für $x(n,k)$:

$$\frac{x(n,k)^3}{\sqrt{n}} \to 0. \tag{25}$$

Bezeichnen wir mit $\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$ die Dichte der Standardnormalverteilung, so liefert Einsetzen von (24) in (20):

Satz 12.1 (Lokaler Grenzwertsatz für die Binomialverteilung)**.** Sei $0 < p < 1$ und $(k_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit (25), wobei $x(n,k)$ gegeben ist durch (23) mit $\sigma_n = \sqrt{npq}$. Dann gilt

$$b_{n,p}(\{k\}) \sim \frac{1}{\sigma_n} \varphi\left(x(n,k)\right). \tag{26}$$

Sind $(\alpha_n)_{n\geq 1}, (\beta_n)_{n\geq 1}$ Folgen mit (25), so ist die Konvergenz (26) gleichmäßig für alle $(k_n)_{n\geq 1}$ mit $\alpha_n \leq k_n \leq \beta_n$ für alle $n \geq 1$.

Eine typische Situation, in der Satz 12.1 angewandt wird, ist

$$k_n = np + x\sqrt{npq} + O(1)$$

mit $x \in \mathbb{R}$, wobei $O(1)$ (groß-O-Notation) einen von n anhängenden Term bezeichnet (also eine Folge), der beschränkt in n ist. Genauer: Eine Folge $(r_n)_{n\geq 1}$ ist $O(1)$, falls $\sup_{n\geq 1} |r_n| < \infty$.

Bemerkung 20 (Veranschaulichung von Satz 12.1)**.** Wir betrachten das Histogramm der Binomialverteilung, d.h. wir tragen über dem Intervall $[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]$ ein Rechteck der Fläche $b_{n,p}(\{k\})$ ein. Für große n wird das Histogramm sehr flach (da sich die Fläche aller Rechtecke stets zu 1 summiert). Man reskaliert deshalb wie folgt: Betrachte statt k nun $x(n,k) = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ und trage auf $[x(n,k) - \frac{1}{2\sqrt{npq}}, x(n,k) + \frac{1}{2\sqrt{npq}}]$ ein Rechteck der Fläche $b_{n,p}(\{k\})$ ein. Für k wie in Satz 12.1, d.h. mit (25), konvergiert die Höhe des Rechtecks gegen $\varphi(x(n,k))$ nach Satz 12.1. Das reskalierte Histogramm konvergiert also in diesem Sinne gegen die Dichte der Standardnormalverteilung. Um Satz 12.1 für ZVen umzuschreiben, bezeichne S_n eine $b_{n,p}$-verteilte ZVe, also etwa die Summe der Erfolge bei n unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$. Es ist dann

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = x(n,k)\right) = \mathbb{P}\left(S_n^* = x(n,k)\right)$$

im Sinne der folgenden Definition.

Definition 12.2. Sei X eine ZVe in $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$$

die *standardisierte Form* (oder ZVe) zu X.

Bemerkung 21. Es gilt stets $\mathbb{E}[X^*] = 0$ und $\mathrm{Var}(X^*) = 1$. Für die standardisierte ZVe S_n^* zu S_n gilt dann

$$\mathbb{P}(S_n^* = x(n,k)) \sim \frac{1}{\sigma_n}\varphi(x(n,k))$$

für $(k_n)_{n\geq 1}$ mit (25).
Im nächsten Schritt sollen nicht nur die Wahrscheinlichkeiten der „lokalen“ Ereignisse $\{S_n^* = x(n,k)\}$ approximiert werden, sondern auch Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse der Form $\{a \leq S_n^* \leq b\}$ für $a < b$. Wir bezeichnen dazu mit

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du$$

die *Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.*

Satz 12.3 (Satz von de Moivre-Laplace)**.** Sei $0 < p < 1$ und S_n eine $b_{n,p}$-verteilte ZVe. Dann gilt für alle $a < b$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a \leq S_n^* \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Beweis.
Seien $a < b$ und, wie zuvor, $\sigma_n = \sqrt{npq}$. Es seien $\alpha_n := \lceil a\sigma_n + np\rceil$, $\beta_n := \lfloor b\sigma_n + np\rfloor$. Da S_n eine ganzzahlige ZVe ist, gilt dann

$$\{a \leq S_n^* \leq b\} = \{a\sigma_n + np \leq S_n \leq b\sigma_n + np\} = \{\alpha_n \leq S_n \leq \beta_n\}.$$

Ferner gilt nach Konstruktion

$$|x(n,\alpha_n) - a| \leq \frac{1}{\sigma_n}, \quad |x(n,\beta_n) - b| \leq \frac{1}{\sigma_n}.$$

Nach Satz 12.1 existieren eine Folge $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ mit $\varepsilon_n \downarrow 0$ und

$$1 - \varepsilon_n \leq \frac{b_{n,p}(\{k\})}{\varphi(x(n,k))/\sigma_n} \leq 1 + \varepsilon_n \text{ für alle } \alpha_n \leq k \leq \beta_n.$$

Mit $R_n = \sum_{k=\alpha_n}^{\beta_n} \frac{1}{\sigma_n}\varphi(x(n,k))$ gilt also

$$(1 - \varepsilon_n)R_n \leq \mathbb{P}(a \leq S_n^* \leq b) \leq (1 + \varepsilon_n)R_n. \tag{27}$$

Andererseits ist aber R_n die Riemann-Summe zu

$$\int_{x\left(n,\alpha_n - \frac{1}{2}\right)}^{x\left(n,\beta_n + \frac{1}{2}\right)} \varphi(x)\,dx = \Phi\left(x\left(n,\beta_n + \frac{1}{2}\right)\right) - \Phi\left(x\left(n,\alpha_n - \frac{1}{2}\right)\right). \tag{28}$$

Mit $n \to \infty$ folgt aus (27) und $x(n, \beta_n + \frac{1}{2}) \to b$ sowie $x(n, \alpha_n - \frac{1}{2}) \to a$, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a \le S_n^* \le b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Dies ist die Behauptung. ∎

Beispiel 12.4. Es werden 600 faire Würfel geworfen. Die Wahrscheinlichkeit, mindestens 90 Sechsen und höchstens 100 Sechsen zu werfen, wird gesucht. Exakt erhält man

$$b_{n,p}(\{90, \dots, 100\}) = 0{,}4024\dots$$

für $n = 600$ und $p = \frac{1}{6}$. Damit gilt $np = 100$, $\sigma_n = \sqrt{npq} = 9{,}13$. Die Approximation aus dem Satz von de Moivre-Laplace liefert

$$\mathbb{P}(90 \le S_n \le 100) = \mathbb{P}\left(\frac{90-100}{\sigma_n} \le S_n^* \le \frac{100-100}{\sigma_n}\right) \approx \Phi(0) - \Phi\left(-\frac{10}{9{,}13}\right) \approx 0{,}36,$$

wobei S_n die $b_{600,1/6}$-Verteilung hat.
Genauer kann mit den Korrekturtermen $\pm\frac{1}{2}$ in (28) im Beweis von Satz 12.3 approximiert werden: Statt des Integrals über $[(90-100)/\sigma_n, (100-100)/\sigma_n]$ nehme man das Integral über $[(90-\frac{1}{2}-100)/\sigma_n, (100+\frac{1}{2}-100)/\sigma_n]$. Wegen $\sigma_n \to \infty$ für $n \to \infty$ macht dies asymptotisch im Grenzwert keinen Unterschied, für festes n liefert dies jedoch eine bessere Approximation:

$$\mathbb{P}(90 \le S_n \le 100) \approx \Phi\left(\frac{0{,}5}{9{,}13}\right) - \left(-\frac{10{,}5}{9{,}13}\right) \approx 0{,}397.$$

L3: Bemerkung für L3-Studierende: Die Normalverteilung als Näherung der Binomialverteilung ist Themenfeld der Qualifikationsphase Q3.3 mit erhöhtem Niveau (Leistungskurs). Dazu gehören die Dichte (im Kerncurriculum als „Dichtefunktion“ bezeichnet) der Normalverteilung sowie ihre Momente. Der Satz von de Moivre–Laplace leistet zwar die im Kerncurriculum gewünschte Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung, ist allerdings nur ein (enger, historisch relevanter) Spezialfall des Zentralen Grenzwertsatzes, der in Abschnitt 14 besprochen wird.
Im Kerncurriculum fehlt die für das stochastische Denken ebenso wichtige Näherung der Binomialverteilung (und verwandter Verteilungen) durch die Poissonverteilung. Denn oft kann für große n die Erfolgswahrscheinlichkeit p nicht als fest (also unabhängig von n) angesehen werden wie im Satz von de Moivre–Laplace. Der folgende Abschnitt ergänzt das Verständnis deshalb wesentlich im Fall $np \to \lambda \in (0, \infty)$ für $n \to \infty$, wobei p dann offenbar von n abhängen wird.

13 Poissonapproximation

In diesem Abschnitt werden Summen unabhängiger Indikatorvariablen (die also die Ausgänge unabhängiger Bernoulli Experimente beschreiben) approximiert, deren Erfolgswahrscheinlichkeiten nicht gleich zu sein brauchen. Die hier dargestellte Approximation durch die Poissonverteilung ist nützlich, falls die Erfolge vieler unabhängiger

Bernoulli-Experimente mit kleinen Erfolgswahrscheinlichkeiten gezählt werden. Insbesondere kann die Binomialverteilung $b_{n,p}$ für große n und kleine p approximiert werden. Die Poissonverteilung Π_λ zum Parameter $\lambda > 0$ war definiert durch

$$\Pi_\lambda(\{k\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \text{ für } k \in \mathbb{N}_0.$$

In Beispiel 7.8 zu Satz 7.7 über erzeugende Funktionen erhielten wir

$$X, Y \text{ unabhängig mit } \mathbb{P}_X = \Pi_\lambda \text{ und } \mathbb{P}_Y = \Pi_\mu \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{X+Y} = \Pi_{\lambda+\mu} \text{ für } \lambda, \mu > 0. \tag{29}$$

Zur Approximation von Verteilungen auf $\mathbb{Z}$ verwenden wir folgenden Abstandsbegriff.

Definition 13.1. Seien Q_1 und Q_2 W-Verteilungen auf $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$. Dann heißt

$$d_{TV}(Q_1, Q_2) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} |Q_1(\{k\}) - Q_2(\{k\})|$$

der *Totalvariationsabstand* von Q_1 und Q_2.

Bemerkung 22. Wir haben folgende offensichtliche Eigenschaften:

- Es gilt stets $d_{TV}(Q_1, Q_2) \leq 2$, denn
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |Q_1(\{k\}) - Q_2(\{k\})| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} (Q_1(\{k\}) + Q_2(\{k\})) \leq 2.$$
- Seien Q_n, Q W-Verteilungen auf $\mathbb{Z}$ für $n \geq 1$. Falls $d_{TV}(Q_n, Q) \to 0$, so $Q_n(\{k\}) \to Q(\{k\})$ für $n \to \infty$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Die Konvergenz gilt gleichmäßig in $k \in \mathbb{Z}$.

Satz 13.2 (Koppelungslemma)**.** Seien Q_1, Q_2 W-Verteilungen auf $\mathbb{Z}$ und X, Y ZVe auf einem W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}_X = Q_1$ und $\mathbb{P}_Y = Q_2$. Dann gilt

$$d_{TV}(Q_1, Q_2) \leq 2\mathbb{P}(X \neq Y).$$

Beweis.
Für $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)| \\
&= |\mathbb{P}(X = k, Y = k) + \mathbb{P}(X = k, Y \neq k) - [\mathbb{P}(Y = k, X = k) + \mathbb{P}(Y = k, X \neq k)]| \\
&\leq \mathbb{P}(X = k, Y \neq k) + \mathbb{P}(Y = k, X \neq k).
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\{X \neq Y\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\{X \neq Y\} \cap \{X = k\}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\{X = k\} \cap \{Y \neq k\})$$

eine paarweise disjunkte Vereinigung. Es folgt also

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = k, Y \neq k) = \mathbb{P}(X \neq Y).$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} d_{TV}(Q_1, Q_2) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |Q_1(\{k\}) - Q_2(\{k\})| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)| \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathbb{P}(X = k, Y \neq k) + \mathbb{P}(Y = k, X \neq k)) = 2\mathbb{P}(X \neq Y). \end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung. ∎

Satz 13.3. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige ZVe mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = p_i$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p_i$ und $p_1, \ldots, p_n \in [0, 1]$. Seien $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ und $\lambda_n = p_1 + \cdots + p_n$. Dann gilt

$$d_{TV}\left(\mathbb{P}_{S_n}, \Pi_{\lambda_n}\right) \leq 2\sum_{i=1}^n p_i^2.$$

Beweis.
Um Satz 13.2 anwenden zu können, müssen S_n und ZVe T_n mit $\mathbb{P}_{T_n} = \Pi_{\lambda_n}$ auf einem W-Raum konstruiert werden, sodass S_n und T_n mit möglichst großer W-keit gleiche Werte annehmen. Dazu wählen wir $\Omega_i = \{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$ und je eine W-Verteilung auf Ω_i wie folgt für alle $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i(\{0\}) &= 1 - p_i, \\ \mathbb{P}_i(\{k\}) &= e^{-p_i}\frac{p_i^k}{k!} \qquad \text{für } k \geq 1, \\ \mathbb{P}_i(\{-1\}) &= e^{-p_i} - (1 - p_i). \end{aligned}$$

(Wegen $1 + x \leq e^x$ für $x \in \mathbb{R}$ ist $\mathbb{P}_i(\{-1\}) \geq 0$ und damit durch die Werte oben tatächlich eine W-Verteilung $\mathbb{P}_i$ definiert.) Ferner seien $\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ und $\mathbb{P}$ das Produktmaß der $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ auf Ω (vgl. Definition 4.3), d.h. für $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$ gilt $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \prod_{1\leq i\leq n} \mathbb{P}_i(\{\omega_i\})$. Wir definieren ZVe auf Ω durch

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \omega_i = 0, \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad Y_i(\omega) = \begin{cases} k, & \text{falls } \omega_i = k \geq 1 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $i = 1, \ldots, n$. Nach Satz 4.2 bilden $\{X_1, \ldots, X_n\}$ und $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ jeweils eine unabhängige Familie von ZVen. (Die Projektionen auf die einzelnen Komponenten sind unter einem Produktmaß unabhängig, die X_i sind Funktionen der Projektionen, es greift deshalb Satz 5.7. Für die Y_i ebenso.) Nach Konstruktion sind $X_1, \ldots, X_n$ verteilt wie im Satz vorgegeben, $Y_1, \ldots, Y_n$ sind poissonverteilt, $\mathbb{P}_{Y_i} = \Pi_{p_i}$. Nach (29) ist also $T_n := Y_1 + \cdots + Y_n$ poissonverteilt zum Parameter $\lambda_n > 0$, d.h. $\mathbb{P}_{T_n} = \Pi_{\lambda_n}$. Das Koppelungslemma (Satz 13.2) impliziert

$$d_{TV}\left(\mathbb{P}_{S_n}, \Pi_{\lambda_n}\right) \leq 2\mathbb{P}\left(S_n \neq T_n\right). \tag{30}$$

Wegen $\{S_n \neq T_n\} \subset \bigcup_{1\leq i\leq n}\{X_i \neq Y_i\}$ schätzen wir $\mathbb{P}(X_i \neq Y_i)$ ab: Es ist

$$\mathbb{P}(X_i = Y_i) = \mathbb{P}_i(\{0\}) + \mathbb{P}_i(\{1\}) = 1 - p_i + e^{-p_i}p_i,$$

also $\mathbb{P}(X_i \neq Y_i) = p_i(1 - e^{-p_i}) \leq p_i^2$, wobei wieder die Ungleichung $e^x \geq 1 + x$ für $x \in \mathbb{R}$ verwendet wird. Mit (30) folgt deshalb

$$d_{TV}\left(\mathbb{P}_{S_n}, \Pi_{\lambda_n}\right) \leq 2\mathbb{P}(S_n \neq T_n) \leq 2\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \neq Y_i) \leq 2\sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$

Dies ist die Behauptung. ∎

BSc: Bemerkung für Bachelor-Studierende: Es sind weitreichende Verallgemeinerungen und Verbesserungen von Satz 13.3 bekannt, insbesondere schärfere Abschätzungen des Totalvariationsabstands in Satz 13.3 sowie Versionen, in denen auf die Unabhängigkeit der $X_1, \ldots, X_n$ verzichtet werden kann. Zum Beispiel gilt unter den Voraussetzungen von Satz 13.3, dass

$$d_{TV}\left(\mathbb{P}_{S_n}, \Pi_{\lambda_n}\right) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} p_i^2,$$

was etwa für $p_i = \frac{1}{i}$ eine Konvergenzaussage liefert, während Satz 13.3 für diese Wahl der p_i zu grob ist. Zahlreiche Ergebnisse in diese Richtungen sind mit der *Steinschen Methode* erzielt worden. Solche finden sich, auch Variante mit Abhängigkeiten zwischen den $X_1, \ldots, X_n$ in [1].

Korollar 13.4. Sei $p = p(n)$ eine Folge in $[0, 1]$ mit $n \cdot p \to \lambda > 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt für die Binomialverteilung $b_{n,p}$:

$$b_{n,p}(\{k\}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Pi_\lambda(\{k\}) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis.
Für festes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $p_1 := \cdots := p_n := p(n)$. Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige ZVe mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = p_i = \mathbb{P}(X_i = 0)$. Dann ist $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ binomial $b_{n,p(n)}$ verteilt. Nach Satz 13.3 gilt also

$$d_{TV}\left(b_{n,p(n)}, \Pi_{np(n)}\right) \leq 2np^2(n) \sim \frac{2\lambda^2}{n} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Andererseits gilt für die Poissonverteilung

$$\Pi_{np(n)}(\{k\}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Pi_\lambda(\{k\}),$$

da $np(n) \to \lambda$. Zusammen folgt die Behauptung. ∎

Man verwendet Korollar 13.4 häufig, um $b_{n,p}$ für große n und kleine p durch die Poissonverteilung Π_{pn} zu approximieren.

Beispiel 13.5. Es gebe 30 Selbstmorde pro 100000 Einwohner pro Jahr. Wie ist die Anzahl der Selbstmorde pro Jahr in einer Stadt mit 120000 Einwohnern approximativ verteilt? Nehmen wir an, jeder der Einwohner begehe unabhängig von den anderen

Selbstmord mit Wahrscheinlichkeit $p = 3/10000 = 0{,}0003$. Bei 120000 Einwohnern wäre die Verteilung der Anzahl der Selbstmorde also binomial

$$b_{120000,0.0003} \approx \Pi_{36}.$$

Nach Satz 13.3 kann man die gefragte zufällige Anzahl also durch die Poissonverteilung Π_{36} approximieren.

14 Der Zentrale Grenzwertsatz

Sind $B_1, \ldots, B_n$ unabhängige ZVe mit $\mathbb{P}(B_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(B_i = 0)$ und $p \in (0, 1)$, so lieferte der Satz von de Moivre-Laplace 12.3, Abschnitt 12, dass für die Summe $S_n := \sum_{1 \le i \le n} B_i$ für alle $a < b$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\,(a \le S_n^* \le b) = \Phi(b) - \Phi(a), \tag{31}$$

wobei S_n^* die standardisierte ZVe zu S_n bezeichnet (vgl. Definition 12.2). Die Verallgemeinerung dieses Resultats auf Summen unabhängiger ZVe, die alle dieselbe Verteilung haben (mit endlicher Varianz), bezeichnet man als „Zentralen Grenzwertsatz“ (wie auch weiterreichende Verallgemeinerungen, die hier nicht besprochen werden).

Definition 14.1. Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heißen *identisch verteilt*, falls gilt:

$$\mathbb{P}_{X_1} = \mathbb{P}_{X_2} = \cdots = \mathbb{P}_{X_n}.$$

Definition 14.2. Sei $(X_n)_{n\ge1}$ eine Folge reeller Zufallsvariable und X eine reelle Zufallsvariable mit Verteilungsfunktionen F_n bzw. F. Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert in Verteilung* gegen X, falls für alle $x \in \mathbb{R}$, in denen F stetig ist, gilt

$$F_n(x) \to F(x), \quad (n \to \infty).$$

Bezeichnungen: $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ oder $X_n \xrightarrow{d} X$ für $n \to \infty$. (Dabei stehen $\mathcal{L}$ und d für engl. *law* bzw. *distribution*, was beides englische Begiffe für die Verteilung einer ZVe sind.

Bemerkung 23. Ist gezeigt, dass $(S_n^*)_{n\ge1}$ in Verteilung gegen eine standardnormalverteilte Zufallsvariable konvergiert, so folgt insbesondere (31), da

$$\mathbb{P}\,(a \le S_n^* < b) = F_{S_n^*}(b) - F_{S_n^*}(a) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(b) - \Phi(a),$$

da Φ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

Satz 14.3 (Zentraler Grenzwertsatz)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter reeller ZVe mit $\mathrm{Var}(X_1) \in (0, \infty)$. Bezeichne $S_n = \sum_{1\le i\le n} X_i$, sowie

$$S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}\,[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} = \frac{S_n - n\mathbb{E}\,[X_1]}{\sigma\sqrt{n}}$$

mit $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X_1)$. Sei Z eine standardnormalverteilte ZVe. Dann konvergiert $(S_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen Z.

Der hier gegebene Beweis stützt sich auf folgendes Lemma.

Lemma 14.4. Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion mit beschränkter erster, zweiter und dritter Ableitung. Seien X_n, Z wie in Satz 14.3. Dann gilt

$$\mathbb{E}\,[h(S_n^*)] \to \mathbb{E}\,[h(Z)].$$

Bevor wir Lemma 14.4 beweisen, zeigen wir, wie daraus der Zentrale Grenzwertsatz 14.3 folgt.

Beweis von 14.3.
Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig gegeben. Dann existieren zwei Funktionen h_1, h_2 wie in Lemma 14.4 mit

$$\mathbb{1}_{(-\infty,x-\varepsilon)} \le h_1 \le \mathbb{1}_{(-\infty,x)} \le h_2 \le \mathbb{1}_{(-\infty,x+\varepsilon)}.$$

Wir können etwa

$$h_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t \le x, \\ \left(1 - \left(\frac{t-x}{\varepsilon}\right)^4\right)^4, & \text{falls } x \le t \le x+\varepsilon, \\ 0, & \text{falls } t \ge x+\varepsilon \end{cases}$$

wählen, h_1 entsprechend. Die Monotonie des Erwartungswertes liefert

$$\mathbb{E}\,[h_1(S_n^*)] \le \mathbb{P}(S_n^* < x) \le \mathbb{E}\,[h_2(S_n^*)]$$

sowie

$$\mathbb{P}(Z < x-\varepsilon) \le \mathbb{E}\,[h_1(Z)],\ \mathbb{E}\,[h_2(Z)] \le \mathbb{P}(Z < x+\varepsilon).$$

Mit Lemma 14.4 und $n \to \infty$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z < x-\varepsilon) &\le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n^* < x) \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n^* < x) \le \mathbb{P}(Z < x+\varepsilon). \end{aligned} \tag{32}$$

Es ist für $\varepsilon \downarrow 0$ jeweils

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(x \le Z \le x+\varepsilon) = \int_x^{x+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \to 0, \\ &\mathbb{P}(x-\varepsilon \le Z < x) \to 0. \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \downarrow 0$ in (32) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n^* < x) = \mathbb{P}(Z < x) = \Phi(x).$$

Da $x \in \mathbb{R}$ beliebig war, ist dies gerade die Konvergenz in Verteilung von S_n^* gegen Z. ∎

Beweis von Lemma 14.4.
Wir nehmen an, dass $\mathbb{E}[X_1] = 0$ und $\mathrm{Var}(X_1) = 1$ ist. (Andernfalls kann X_i durch seine standardisierte Version ersetzt werden.) Wir ergänzen $X_1, \dots, X_n$ durch standardnormalverteilte ZVe $Z_1, \dots, Z_n$, sodass die $2n$ ZVen $X_1, \dots, X_n, Z_1, \dots, Z_n$ unabhängig sind. Wir erzeugen künstlich eine Teleskopsumme durch schrittweises Ersetzen der X_i durch Z_i:

$$h\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - h\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(h\left(U_i + \frac{X_i}{\sqrt{n}}\right) - h\left(U_i + \frac{Z_i}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

wobei $U_i := (X_1 + \cdots + X_{i-1} + Z_{i+1} + \cdots + Z_n)/\sqrt{n}$. Man beachte, dass (nach einer Übungsaufgabe) $(1/\sqrt{n})\sum_{1\le i\le n} Z_i$ wieder standardnormalverteilt ist. Taylorentwicklung von h um U_i liefert

$$\begin{aligned}
&h\left(U_i + \frac{X_i}{\sqrt{n}}\right) - h\left(U_i + \frac{Z_i}{\sqrt{n}}\right)\\
&= h'(U_i)\frac{X_i - Z_i}{\sqrt{n}} + h''\left(U_i + \alpha\frac{X_i}{\sqrt{n}}\right)\frac{X_i^2}{2n} - h''\left(U_i + \alpha'\frac{Z_i}{\sqrt{n}}\right)\frac{Z_i^2}{2n}\\
&= h'(U_i)\frac{X_i - Z_i}{\sqrt{n}} + h''(U_i)\frac{X_i^2 - Z_i^2}{2n} + R_{in},
\end{aligned}$$

wobei

$$R_{in} = \left(h''\left(U_i + \alpha\frac{X_i}{\sqrt{n}}\right) - h''(U_i)\right)\frac{X_i^2}{2n} - \left(h''\left(U_i + \alpha'\frac{Z_i}{\sqrt{n}}\right) - h''(U_i)\right)\frac{Z_i^2}{2n}$$

und α, α' zufällig in $[0,1]$ sind. Bezeichne $c''' := \|h'''\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |h'''(x)| < \infty$. Nach dem Mittelwertsatz gilt stets $|h''(x) - h''(y)| \le c'''|x - y|$. Damit folgt

$$|R_{in}| \le \mathbb{1}_{\{|X_i|\le k\}} c'''\frac{k^3}{n^{3/2}} + \mathbb{1}_{\{|X_i|>k\}} 2c''\frac{X_i^2}{n} + c'''\frac{|Z_i|^3}{n^{3/2}},$$

wobei $c'' := \|h''\|_\infty$ und $k > 0$ beliebig ist. Da U_i, X_i, Z_i unabhängig sind, folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h'(U_i)(X_i - Z_i)] &= \mathbb{E}[h'(U_i)]\mathbb{E}[X_i - Z_i] = 0,\\
\mathbb{E}[h''(U_i)(X_i^2 - Z_i^2)] &= \mathbb{E}[h''(U_i)]\mathbb{E}[X_i^2 - Z_i^2] = 0.
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left[h\left(U_i + \frac{X_i}{\sqrt{n}}\right) - h\left(U_i + \frac{Z_i}{\sqrt{n}}\right)\right]\right| &= |\mathbb{E}[R_{in}]| \le \mathbb{E}[|R_{in}|]\\
&\le c'''\frac{k^3 + \mathbb{E}[|Z_1|^3]}{n^{3/2}} + \frac{2c''}{n}\mathbb{E}\left[X_1^2\mathbb{1}_{\{|X_1|>k\}}\right]
\end{aligned}$$

und mit Summation über $i = 1, \dots, n$

$$|\mathbb{E}[h(S_n^*)] - \mathbb{E}[h(Z)]| \le \frac{C}{\sqrt{n}} + 2c''\mathbb{E}\left[X_1^2\mathbb{1}_{\{|X_1|>k\}}\right]$$

mit einer von k abhängenden Konstanten $C > 0$, also

$$\limsup_{n\to\infty} |\mathbb{E}[h(S_n^*)] - \mathbb{E}[h(Z)]| \le 2c''\mathbb{E}\left[X_1^2 \mathbb{1}_{\{|X_1|>k\}}\right].$$

Hieraus folgt die Behauptung, da $\mathbb{E}[X_1^2 \mathbb{1}_{\{|X_1|>k\}}] \to 0$ für $k \to \infty$, was aus $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ folgt. Z.B. gilt im diskreten Fall ist

$$\mathbb{E}\left[X_1^2 \mathbb{1}_{\{|X_1|>k\}}\right] = \sum_{a:|a|>k} a^2 \mathbb{P}(X_1 = a)$$

und die Konvergenz dieser Reihen liefert die gewünschte Konvergenz. ∎

Bemerkung 24. Man kann (recht leicht) zeigen, dass die Konvergenz der Verteilungsfunktion in Satz 14.3 nicht nur punktweise, sondern sogar gleichmäßig gilt.

Definition 14.5. Seien X, Y reelle ZVe mit Verteilungsfunktionen F und G. Dann ist durch

$$\rho(X,Y) := \rho(F,G) := \sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x) - G(x)| = \|F - G\|_\infty$$

eine Metrik auf der Menge der Verteilungsfunktionen definiert. Sie heißt *Kolmogorov-Metrik* (oder auch uniforme Metrik).

Bemerkung 25. In der Situation von Satz 14.3 gilt also sogar

$$\rho(S_n^*, Z) \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

4 Mathematische Statistik

Die Stochastik teilt sich in zwei Teilgebiete ein:

$$\text{Stochastik} \begin{cases} \text{Wahrscheinlichkeitstheorie (Kap. 1-3,5,6)} \\ \text{Statistik} \end{cases}$$

In der W-Theorie nimmt man an, W-Maße, die einfache Zufallsexperimente „steuern“, zu kennen, und möchte daraus Eigenschaften komplizierterer Größen herleiten, z.B. Gesetze großer Zahlen, Grenzwertsätze, Poissonapproximation. Die Statistik wiederum lässt sich in zwei Gebiete unterteilen:

$$\text{Statistik} \begin{cases} \text{deskriptive Statistik (Darstellung von Daten: Tabellen, Graphiken)} \\ \text{schließende Statistik (Inferenzstatistik, induktive Statistik) (Kap. 4)} \end{cases}$$

Man kennt das W-Maß $\mathbb{P}$, das ein Zufallsexperiment steuert, nicht und möchte aus Beobachtungen (Realisierungen) von Versuchsausgängen auf $\mathbb{P}$ oder zumindest Eigenschaften von $\mathbb{P}$ schließen. Drei typische Beispiele sind:

1. Münzwurf (Bernoulliexperiment mit Erfolgsw-keit $p \in [0,1]$): Der Parameter p sei unbekannt. Das Experiment werde n mal unabhängig ausgeführt. Dies liefert Daten $x_1, \dots, x_n \in \{0,1\}$.
   Problem: Rückschlüsse auf p.
   a) Gebe Schätzwert für p an – *Schätzproblem.*
   b) Gebe Intervall für p an – *Konfidenzintervall.*
   c) Entscheide etwa, ob die Münze fair ist, d.h. ob $p = \frac{1}{2}$ oder $p \neq \frac{1}{2}$ – *Test.*
2. Karpfen im Teich: In einem Teich befindet sich eine unbekannte Anzahl N von Fischen. Es werden s Fische gefangen, markiert und wieder ausgesetzt. Nachdem sich die Fische gut durchmischt haben, werden in einem zweiten Fang n Fische gefangen und die darunter Markierten gezählt. Wie schließt man auf N?
   Betrachte Verhältnisse: Sei x die Anzahl der markierten Fische im zweiten Fang. Naheliegend ist $x/n \approx s/N$, also $N \approx \frac{sn}{x}$.
3. Physikalische Messung: Eine Messung setze sich aus dem zu messenden Wert (deterministisch) und einem zufälligen Messfehler, der sich als Überlagerung vieler kleiner Einflüsse zusammensetze, zusammen. Der Zentrale Grenzwertsatz legt nahe, die Messungen als Realisierungen unabhängiger $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilter ZVen mit unbekanntem $(\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ zu modellieren. Das statistische Problem ist, aus den Daten auf (μ, σ^2) rückzuschließen.
   Annahme: Der Fehler sei im Mittel 0. Messungen werden als Realisierungen einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilter ZVe $X = \mu + Z$ aufgefasst, wobei Z normalverteilt und zentriert ist.

15 Schätzen

Es wird folgender allgemeine Rahmen für Schätzprobleme verwendet.

Definition 15.1. Ein *Schätzproblem* besteht aus

a) *Stichprobenraum* $(S, \mathcal{C})$: messbarer Raum.
   (S beschreibt die Menge der möglichen Beobachtungsergebnisse.)

b) *Familie* $\{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ von W-Maßen auf $(S, \mathcal{C})$, Θ eine beliebige Parametermenge.
   (Menge der möglichen Verteilungen aufgrund theoretischer Vorüberlegungen.)

c) $g : \Theta \to \Gamma \subset \mathbb{R}^d$ *zu schätzende Funktion.*
   (Häufig $\Gamma = \Theta \subset \mathbb{R}$ und $g(\vartheta) = \vartheta$.)

Beispiel 15.2. Münze mit unbekannter Erfolgw-keit $p \in [0,1]$ werde n-mal geworfen:

$$(S, \mathcal{C}) = (\{0,1\}^n, \mathcal{P}(\{0,1\}^n)), \quad \Theta = [0,1]$$

und für $\vartheta \in \Theta$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in S$ sei

$$\mathbb{P}_\vartheta(\{x\}) = \vartheta^{\sum x_i}(1-\vartheta)^{n - \sum x_i}$$

sowie $g(\vartheta) = \vartheta$.

Beispiel 15.3 (Karpfen im Teich)**.** N sei die Anzahl der Fische im Teich (unbekannt), s Anzahl markierter Fische, n Anzahl Fische im zweiten Fang.

$$(S, \mathcal{C}) = (\{0, 1, \dots, n\}, \mathcal{P}(S)) .$$

Vorüberlegung: Angenommen, es seien N Fische im See. Dann gilt für die Anzahl x der markierten Fische im zweiten Fang

$$\mathbb{P}_N(\{x\}) = \frac{\binom{s}{x}\binom{N-s}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \ x \in S.$$

Die Anzahl der markierten Fische im zweiten Fang ist hypergeometrisch verteilt zu Parametern n, N, s, d.h. $\mathbb{P}_N = h(\,\cdot\,; n, N, s)$ mit h wie in Satz 2.13. Wir wählen deshalb

$$\Theta = \{\vartheta \in \mathbb{N} : \vartheta \geq s \vee n\} \text{ und zu } \vartheta \in \Theta : \mathbb{P}_\vartheta = h(\,\cdot\,; n, \vartheta, s).$$

Die zu schätzende Funktion ist $g(\vartheta) = \vartheta$.

Beispiel 15.4. Messungen $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängige $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte ZVe mit unbekannten $\vartheta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) =: \Theta$. Man beobachtet also Daten im Raum $(S, \mathcal{C}) = (\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$. Zu $\vartheta \in \Theta$ sei $\mathbb{P}_\vartheta = \mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)}$. Dann hat $\mathbb{P}_\vartheta$ nach Lemma 9.11 die Dichte

$$f_\vartheta(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right)$$

für $x = (x_1, \dots, x_n) \in S$. Die zu schätzende Funktion ist $g(\vartheta) = \vartheta$.

Definition 15.5. Für ein Schätzproblem gegeben durch Stichprobenraum $(S, \mathcal{C})$, Verteilungen $\{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ und zu schätzender Funktion $g : \Theta \to \Gamma \subset \mathbb{R}^d$ heißt jede messbare Abbildung $T : S \to \Gamma$ *Schätzer* für g. (Γ ist dabei mit der Spur von $\mathfrak{B}^d$ in Γ versehen, vgl. Beispiele 8.3).

Bemerkung 26. Statt Schätzer wird auch Punktschätzer oder Schätzfunktion gesagt.

Wir betrachten im Folgenden Methoden, um Schätzer zu konstruieren, anschließend Gütekriterien für Schätzer.

(A) Wir betrachten zunächst höchstens abzählbares S, d.h. $\{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ ist eine Familie diskreter W-Maße, $\mathcal{C} = \mathcal{P}(S)$.

Definition 15.6. Sei S höchstens abzählbar und $\{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ eine Familie von Verteilungen auf S. Zu $x \in S$ heißt

$$L_x : \Theta \to [0, 1], \ \vartheta \mapsto \mathbb{P}_\vartheta(\{x\}) \quad \textit{Likelihood-Funktion}.$$

Falls L_x ein globales Maximum $\hat{\vartheta}(x)$ annimmt, so heißt $\hat{\vartheta}(x)$ *Maximum-Likelihood-Schätzer* (ML-Schätzer) von ϑ, und $g(\hat{\vartheta}(x))$ heißt ML-Schätzer von $g(\vartheta)$.

Der ML-Schätzer schätzt also zu gegebener Beobachtung $x \in S$ denjenigen Parameter $\hat{\vartheta}(x)$, für den die beobachteten Daten die größte W-keit haben.

Beispiel 15.7 (ML-Schätzer für Beispiel 15.2)**.** Zu $x \in \{0,1\}^n$ ist $L_x(\vartheta) = \vartheta^{\sum x_i}(1-\vartheta)^{n-\sum x_i}$ und $\mathcal{L}_x(\vartheta) := \log L_x(\vartheta) = (\sum x_i)\log\vartheta + (n - \sum x_i)\log(1-\vartheta)$. Da der Logarithmus monoton wachsend ist, ist L_x maximal genau dann, wenn $\mathcal{L}_x$ maximal ist.

$$\frac{d\mathcal{L}_x}{d\vartheta}(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta}\sum x_i - \frac{1}{1-\vartheta}\left(n - \sum x_i\right) \stackrel{!}{=} 0. \tag{33}$$

In der Nullstelle $\hat{\vartheta}(x) = \frac{1}{n}\sum x_i$ hat L_x ein globales Maximum. Es ist also

$$\hat{\vartheta}(x) = \frac{1}{n}\sum_{1\le i\le n} x_i$$

ML-Schätzer für ϑ.

Bemerkung 27. Die Gleichung (33),

$$\frac{d\mathcal{L}_x}{d\vartheta}(\vartheta) = 0$$

heißt *ML-Gleichung*.

Beispiel 15.8 (ML-Schätzer für Beispiel 15.3)**.** Im Setting von Beispiel 15.3 gilt

$$\frac{\mathbb{P}_\vartheta(\{x\})}{\mathbb{P}_{\vartheta-1}(\{x\})} = \frac{(\vartheta - s)(\vartheta - n)}{\vartheta(\vartheta - s - n + x)}$$

und damit

$$\mathbb{P}_\vartheta(\{x\}) > \mathbb{P}_{\vartheta-1}(\{x\}) \Leftrightarrow (\vartheta - s)(\vartheta - n) > \vartheta(\vartheta - s - n + x) \Leftrightarrow \vartheta < \frac{sn}{x}.$$

Es ist zu $x \in S$ also $\mathbb{P}_\vartheta(\{x\})$ maximal für

$$\begin{cases} \hat{\vartheta}(x) = \lfloor \frac{ns}{x} \rfloor, & \text{falls } \frac{ns}{x} \notin \mathbb{N}, \\ \hat{\vartheta}(x) = \frac{ns}{x} \text{ oder } \hat{\vartheta}(x) = \frac{ns}{x} - 1, & \text{falls } \frac{ns}{x} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bei beliebiger Wahl der beiden Werte im Fall $\frac{ns}{x} \in \mathbb{N}$ ist $\hat{\vartheta}$ ML-Schätzer für ϑ. Der ML-Schätzer braucht also im Allgemeinen nicht eindeutig zu sein.

(B) Wir betrachten nun $S \subset \mathbb{R}^n$ und nehmen an, dass alle Verteilungen $\mathbb{P}_\vartheta$ eine Dichte haben, die wir mit f_ϑ bezeichnen. Man beachte, dass dann für alle $x \in S$ und $\vartheta \in \Theta$ gilt: $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$. Das Konzept der ML-Schätzer muss deshalb modifiziert werden.

Definition 15.9. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{P}_\vartheta$ habe die Dichte f_ϑ für alle $\vartheta \in \Theta$. Für $x \in S$ heißt dann $L_x : \Theta \to \mathbb{R}_0^+$, $\vartheta \mapsto f_\vartheta(x)$ *Likelihood-Funktion*. Falls L_x ein globales Maximum in $\hat{\vartheta}(x)$ annimmt, so heißt $\hat{\vartheta}(x)$ *ML-Schätzer* von ϑ, und $g(\hat{\vartheta}(x))$ heißt ML-Schätzer von $g(\vartheta)$.

Beispiel 15.10 (ML-Schätzer für Beispiel 15.4)**.** Es sei $\vartheta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) =: \Theta$ unbekannt. Wir haben

$$f_\vartheta(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right).$$

Damit

$$\mathcal{L}_x(\vartheta) := \log L_x(\vartheta) = -n\log(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

Wir lösen

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \mathcal{L}_x}{\partial \mu}, \frac{\partial \mathcal{L}_x}{\partial \sigma}\right)(\mu, \sigma) \stackrel{!}{=} (0, 0)\\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n 2(x_i - \mu) = 0 \text{ und } -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0\\
&\Leftrightarrow \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \text{ und } \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)^2.
\end{aligned}$$

An dieser Stelle liegt auch tatsächlich ein Maximum vor. Damit ist

$$\hat{\vartheta}(x) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\right)$$

ML-Schätzer für $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$.

Wir kommen nun zu Gütekriterien für Schätzer. Im Folgenden betrachten wir Schätzprobleme mit zu schätzender Funktion $g : \Theta \to \Gamma$ mit $\Gamma \subset \mathbb{R}$. Für Zufallsvariablen $X : S \to \mathbb{R}$ werden Erwartungswerte bezüglich $\mathbb{P}_\vartheta$ mit $\mathbb{E}_\vartheta[X]$ bezeichnet.

Definition 15.11. Sei $T : S \to \Gamma$ ein Schätzer für eine zu schätzende Funktion $g(\vartheta)$. Der Schätzer T heißt *erwartungstreu*, falls

$$\mathbb{E}_\vartheta[T] = g(\vartheta) \text{ für alle } \vartheta \in \Theta.$$

Erwartungstreue bedeutet also, dass der Schätzer im Mittel (d.h. im Erwartungswert) die zu schätzende Funktion korrekt schätzt; unabhängig davon, welches $\mathbb{P}_\vartheta$ das Wahre ist.

Bemerkung 28. Man bezeichnet auch $\mathrm{Bias}_\vartheta(T) := \mathbb{E}_\vartheta[T] - g(\vartheta)$ den *Bias des Schätzers* T. Es ist T also erwartungstreu („unbiased"), falls $\mathrm{Bias}_\vartheta(T) = 0$ für alle $\vartheta \in \Theta$ gilt.

Beispiel 15.12 (ML-Schätzer in Beispiel 15.2)**.** In Beispiel 15.2 waren $S = \{0, 1\}^n$, $\Theta = [0, 1]$, $\mathbb{P}_\vartheta(\{x\}) = \vartheta^{\sum x_i}(1 - \vartheta)^{n - \sum x_i}$ für $\vartheta \in \Theta$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S$ und $g(\vartheta) = \vartheta$. Wir hatten den ML-Schätzer bestimmt zu

$$T(x) = \hat{\vartheta}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \quad x \in S.$$

Damit gilt für alle $\vartheta \in \Theta$:

$$\mathbb{E}_\vartheta[T] = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k} = \frac{1}{n}\mathbb{E}[X] = \frac{1}{n}(n\vartheta) = \vartheta,$$

wobei X eine $b_{n,\vartheta}$-verteilte ZVe bezeichne. Der ML-Schätzer für Beispiel 15.2 ist also erwartungstreu.

Beispiel 15.13 (ML-Schätzer in Beispiel 15.4)**.** Beispiel 15.4 waren $(S, \mathcal{C}) = (\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n)$, $\Theta = \mathbb{R} \times [0, \infty)$, $\mathbb{P}_\vartheta = \mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)}$ mit $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilt, wobei $\vartheta = (\mu, \sigma^2)$. Wir wollen nun $g(\vartheta) = \sigma^2$ schätzen und hatten bereits den ML-Schätzer bestimmt zu

$$T(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in S.$$

Mit $\mathbb{P}_\vartheta = \mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)}$ und dem Transformationssatz (Lemma 10.5 bzw. Satz 6.6) gilt

$$\mathbb{E}_\vartheta[T] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right]. \tag{34}$$

Eine einfache Rechnung liefert

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2. \tag{35}$$

Zwischenüberlegung: Für unabhängige X, Y mit $\mathbb{P}_X = \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\mathbb{P}_Y = \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ gilt $\mathbb{P}_{X+Y} = \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ (vgl. Übungsaufgaben). Damit hat $\sum_{1\le i\le n} X_i$ die Verteilung $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$ und $\frac{1}{n}\sum_{1\le i\le n} X_i$ die Verteilung $\mathcal{N}(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$. Ferner gilt nach einer Übungsaufgabe, dass für X mit $\mathbb{P}_X = \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ gilt: $\mathbb{E}[X] = \mu_1$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma_1^2$. Insbesondere gilt also

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2.$$

Wir erhalten aus (34) und (35), dass

$$\mathbb{E}_\vartheta[T] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i^2] - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) = \sigma^2 + \mu^2 - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Der ML-Schätzer für $g(\vartheta) = \sigma^2$ ist also nicht erwartungstreu. Erwartungstreu ist der Schätzer

$$\widetilde{T}(x) := \frac{n}{n-1}T(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2,$$

denn es gilt

$$\mathbb{E}_\vartheta[\tilde{T}] = \frac{n}{n-1}\mathbb{E}_\vartheta[T] = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2.$$

Der ML-Schätzer T unterschätzt g also im Mittel.

Bemerkung 29. Erwartungstreue ist eine wünschenswerte Eigenschaft, allerdings existieren erwartungstreue Schätzer nicht immer und falls sie existieren, sind sie nicht unbedingt gute Schätzer (vgl. Übungsaufgaben). Ein anderes Maß für die Güte von Schätzern ist der mittlere quadratische Fehler.

Definition 15.14. Sei $T : S \to \Gamma \subset \mathbb{R}$ ein Schätzer für eine zu schätzende Funktion g. Dann heißt

$$\mathrm{MSE}(\vartheta) := \mathbb{E}_\vartheta[(T - g(\vartheta))^2]$$

mittlerer quadratischer Fehler (MSE=mean squared error).

Bemerkung 30. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}(\vartheta) &= \mathbb{E}_\vartheta[(T - \mathbb{E}_\vartheta[T] + \mathbb{E}_\vartheta[T] - g(\vartheta))^2] \\ &= \mathbb{E}_\vartheta[(T - \mathbb{E}_\vartheta[T])^2] + (\mathbb{E}_\vartheta[T] - g(\vartheta))^2 \\ &= \mathrm{Var}_\vartheta(T) + (\,\mathrm{Bias}_\vartheta(T))^2\,.\end{aligned}$$

Man möchte also $\mathrm{MSE}(\vartheta)$ klein halten, damit die W-keit dass Schätzwerte nahe an der zu schätzenden Größe liegen, groß ist. Allerdings existieren im Allgemeinen keine Schätzer T, der MSE gleichmäßig in ϑ minimiert.

Beispiel 15.15. Gegeben seien Realisierungen $x_1, \dots, x_n$ unabhängiger ZVe $X_1, \dots, X_n$, die identisch gleichverteilt auf $[0, \vartheta]$ seien mit unbekanntem $\vartheta > 0$. Wir haben also $S = [0, \infty)^n$ und $\mathbb{P}_\vartheta$ ist die Gleichverteilung auf $[0, \vartheta]^n$. Wir wollen $g(\vartheta) = \vartheta$ schätzen. Dazu betrachten wir $M_n(x_1, \dots, x_n) = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ sowie die Schätzer

$$\hat{\vartheta}_1(x) = \frac{n+1}{n}M_n(x), \quad \hat{\vartheta}_2(x) = \frac{n+2}{n+1}M_n(x), \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in S. \tag{36}$$

Wir benötigen zunächst ein technisches Hilfsmittel:

Lemma 15.16. Unter $\mathbb{P}_\vartheta$ hat M_n die Dichte

$$f_\vartheta(x) = \mathbb{1}_{[0,\vartheta]}(x)\frac{n}{\vartheta^n}x^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

und es gilt

$$\mathbb{E}_\vartheta[M_n] = \frac{n}{n+1}\vartheta, \quad \mathbb{E}_\vartheta[M_n^2] = \frac{n}{n+2}\vartheta^2.$$

Beweis.
Bezeichne F_{X_i} die Verteilungsfunktion der ZVe X_i. Dann gilt

$$F_{X_i}(x) = \mathbb{P}(X_i \le x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x}{\vartheta}, & 0 \le x \le \vartheta \\ 1, & x \ge \vartheta. \end{cases}$$

Damit folgt für die Verteilungsfunktion F_{M_n} von M_n:

$$F_{M_n}(x) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \le x\}\right) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \left(\frac{x}{\vartheta}\right)^n, & 0 \le x \le \vartheta \\ 1, & x \ge \vartheta. \end{cases}$$

Für $0 \le a \le b \le \vartheta$ gilt also

$$\mathbb{P}_{M_n}([a,b)) = F_{M_n}(b) - F_{M_n}(a) = \int_a^b F'_{M_n}(x)\,dx = \int_a^b \frac{n}{\vartheta^n}x^{n-1}\,dx = \int_a^b f_\vartheta(x)\,dx.$$

Damit folgt

$$\mathbb{E}_\vartheta[M_n] = \int_0^\vartheta x\frac{n}{\vartheta^n}x^{n-1}\,dx = \frac{n}{\vartheta^n}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^\vartheta = \frac{n}{n+1}\vartheta,$$
$$\mathbb{E}_\vartheta[M_n^2] = \int_0^\vartheta x^2\frac{n}{\vartheta^n}x^{n-1}\,dx = \frac{n}{\vartheta^n}\left[\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^\vartheta = \frac{n}{n+2}\vartheta^2.$$

∎

In Beispiel 15.15 gilt damit:

Satz 15.17. Für die Schätzer in (36) gilt: Der Schätzer $\hat{\vartheta}_1$ für ϑ ist erwartungstreu, $\hat{\vartheta}_2$ ist nicht erwartungstreu. Der Schätzer $\hat{\vartheta}_2$ hat gleichmäßig kleineren mittlerene quadratischen Fehler als $\hat{\vartheta}_1$.

Beweis.
Es gilt mit Lemma 15.16:

$$\mathbb{E}_\vartheta[\hat{\vartheta}_1] = \mathbb{E}_\vartheta\left[\frac{n+1}{n}M_n\right] = \vartheta = g(\vartheta),$$

d.h. $\hat{\vartheta}_1$ ist erwartungstreu. Ebenso folgt

$$\mathbb{E}_\vartheta[\hat{\vartheta}_2] = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\vartheta = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\vartheta,$$

d.h. der Schätzer $\hat{\vartheta}_2$ unterschätzt $g(\vartheta)$ im Mittel.
Für den mittleren quadratischen Fehler MSE_1 von $\hat{\vartheta}_1$ gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}_1(\vartheta) &= \mathbb{E}_\vartheta\left[\left(\hat{\vartheta}_1 - \vartheta\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}_\vartheta\left[\left(\frac{n+1}{n}M_n\right)^2\right] - 2\vartheta\mathbb{E}_\vartheta\left[\frac{n+1}{n}M_n\right] + \vartheta^2 \\ &= \frac{\vartheta^2}{(n+1)^2 - 1}.\end{aligned}$$

Analog folgt für den mittleren quadratischen Fehler MSE_2 von $\hat{\vartheta}_2$:

$$\mathrm{MSE}_2(\vartheta) = \frac{\vartheta^2}{(n+1)^2},$$

also $\mathrm{MSE}_2(\vartheta) < \mathrm{MSE}_1(\vartheta)$ für alle $\vartheta > 0$. ∎

16 Konfidenzintervalle

Wir kommen zurück zum Schätzen der Erfolgswahrscheinlichkeit beim Münzwurf. Ein Schätzer gibt einen Hinweis auf die wahre Erfolgswahrscheinlichkeit, allerdings ist nicht klar, wie zuverlässig dieser Wert dann ist. Man möchte deshalb oft auch Abweichungen vom Schätzwert zulassen, etwa dazu ein Intervall um den Schätzwert angeben, um im Gegenzug Garantien zu erhalten, dass der wahre Wert mit hoher Wahrscheinlichkeit vom entsprechenden Intervall (oder Bereich) überdeckt wird. Um solche Wahrscheinlichtkeiten abzuschätzen, tritt hier wieder (wie beim Begriff der Erwartungstreue) das Problem auf, dass wir nicht wissen, welches das Wahrscheinlichkeitsmaß ist, auf das wir uns beziehen müssen. Wir kommen deshalb zu folgender Definition, in der wir uns auf den Rahmen unserer Schätzprobleme beziehen mit Stichprobenraum $(S, \mathcal{C})$, $\{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ der Menge möglicher W-Maßen auf $(S, \mathcal{C})$, Θ der Parametermenge und $g : \Theta \to \Gamma \subset \mathbb{R}$ einer reellwertigen Funktion des Parameters. Bezeichne $\mathcal{I} := \{[a, b] : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$ die Menge der abgeschlossenen Intervalle in $\mathbb{R}$.

Definition 16.1. Seien $(S, \mathcal{C})$, $\{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ und g wie oben gegeben und $0 < \alpha < 1$. Eine Abbildung $I : S \to \mathcal{I}$ heißt Konfidenzintervall für g zum Irrtumsniveau α, falls

$$\mathbb{P}_\vartheta(g(\vartheta) \in I) \geq 1 - \alpha \quad \text{für alle } \vartheta \in \Theta. \tag{37}$$

Das Ereignis in Definition 16.1 ist also $\{g(\vartheta) \in I\} = \{x \in S \mid g(\vartheta) \in I(x)\}$. Man beachte, dass ϑ (und damit $g(\vartheta)$) stets fest ist, aber das Intervall I zufällig. Ist etwa X eine Zufallsvariable in S mit Verteilung $\mathbb{P}_\vartheta$, so ist $\mathbb{P}_\vartheta(g(\vartheta) \in I) = \mathbb{P}(I(X) \ni g(\vartheta))$. Die Notation $\{I(X) \ni g(\vartheta)\}$ wird oft verwendet um klarzumachen, dass $I(X)$, also das Intervall, zufällig ist. Das Kriterium der Definition 16.1 ist damit, dass das (zufällige) Intervall $I(X)$ den (festen) Wert $g(\vartheta)$ mit der gewünschten Wahrscheinlichkeit überdeckt.

L3: Bemerkung für L3-Studierende: Es kommt im Bereich der Konfidenzintervalle (und ähnlich bei Tests, die im folgenden Abschnitt besprochen werden) häufig zu Fehlvorstellung, die auf Missverständnissen beruhen, welche Größen fest, welche zufällig sind. Aus den Daten $x \in S$, die wir als Realisierung einer Zufallsvariable X (mit Verteilung $\mathbb{P}_\vartheta$) modellieren, wird das Konfidenzintervall $I(x)$ konstruiert. Es ist also $I(X)$ ein zufälliges Intervall mit Realisierung $I(x)$. Der Wert $g(\vartheta)$ für das tatsächlich zugrunde liegende ϑ ist dagegen fest, also deterministisch. Deshalb die Schreibweise $\{I(X) \ni g(\vartheta)\}$. Aussagen der Form „wir haben die Beobachtung $x \in S$ gemacht, der Wert $g(\vartheta)$ fällt also mit mindestens Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ in das Intervall $I(x)$“ ergeben deshalb keinen Sinn. Es ist dagegen so, dass der wahre Wert $g(\vartheta)$ fest ist und das Intervall $I(X)$ mindestens mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ den Wert $g(\vartheta)$ überdeckt. Derartige Fehlvorstellungen werden etwa in einem fiktiven Dialog zwischen einem Statistiker und einem Anwender in [11, Seiten 61-64] diskutiert.

Beispiel 16.2. Es werde wieder eine Münze aus Beispiel 15.2 mit unbekannter Erfolgwahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ n-mal geworfen:

$$(S, \mathcal{C}) = (\{0, 1\}^n, \mathcal{P}(\{0, 1\}^n)), \quad \Theta = [0, 1]$$

und für $\vartheta \in \Theta$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in S$ sei

$$\mathbb{P}_\vartheta(\{x\}) = \vartheta^{\sum x_i}(1-\vartheta)^{n-\sum x_i}$$

sowie $g(\vartheta) = \vartheta$. Es sei $0 < \alpha < 1$ gegeben. Gesucht ist ein Konfidenzintervall für ϑ zum Irrtumsniveau α.
Gemäß Beispiel 15.7 ist der ML-Schätzer für ϑ gegeben durch $\hat{\vartheta}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$. Wir betrachten deshalb Intervalle der Form $I(x) = (\hat{\vartheta}(x) - \varepsilon, \hat{\vartheta}(x) + \varepsilon)$ und versuchen, ε geeignet festzulegen. Die zu erfüllende Bedingung (37) in diesem Beispiel ist dann

$$\mathbb{P}_\vartheta\left(|\hat{\vartheta} - \vartheta| \geq \varepsilon\right) \leq \alpha$$

für alle $\vartheta \in [0,1]$. Oder mit $X_1, \dots, X_n$ unabhängigen und Bernoulli $\mathrm{Ber}(\vartheta)$ verteilten Zufallsvariablen und $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ ist dies gleichbedeutend mit

$$\mathbb{P}(|S_n/n - \vartheta| \geq \varepsilon) \leq \alpha. \tag{38}$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten nun abzuschätzen bzw. zu approximieren.
Abschätzung mittels Chebyshev Ungleichung: Um schnell zu einem (groben) Konfidenzintervall zu kommen, wenden wir die Chebyshevsche Ungleichung aus Korollar 11.7 an: Es ist

$$\mathbb{P}(|S_n/n - \vartheta| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

für alle $\vartheta \in [0,1]$. Die Bedingung (37) ist also erfüllt, falls $4n\varepsilon^2\alpha \geq 1$, d.h.

$$I(x) = \left(\hat{\vartheta}(x) - \frac{1}{2\sqrt{\alpha n}}, \hat{\vartheta}(x) + \frac{1}{2\sqrt{\alpha n}}\right)$$

ist ein Konfidenzintervall für ϑ zum Irrtumsniveau α.
Approximation mittels Zentralem Grenzwertsatz: Wir betrachten wieder die Wahrscheinlichkeit in (38) und bringen den Zentralen Grenzwertsatz (Satz 14.3) ins Spiel. Für große n ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|S_n/n - \vartheta| < \varepsilon) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - n\vartheta}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}}\right| < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{\vartheta(1-\vartheta)}}\right) \\
&\approx \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{\vartheta(1-\vartheta)}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{\vartheta(1-\vartheta)}}\right) \\
&= 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{\vartheta(1-\vartheta)}}\right) - 1.
\end{aligned}$$

Dies ist allerdings nicht exakt. Um einen Vergleich zur Abschätzung mittels der Chebeshev Ungleichung zu haben, setzen wir $n = 1000$ und $\alpha = 0.025$. Um den Approximationsfehler aufzufangen geben wir 0.02 zu, d.h. wir sehen Bedingung (37) für diese Werte von n und α als erfüllt an, wenn

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{\vartheta(1-\vartheta)}}\right) - 1 \geq 0.975 + 0.02,$$

also

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{\vartheta(1-\vartheta)}} \geq \Phi^{-1}(0.9975) \approx 2.82.$$

Verwenden wir wieder $\vartheta(1-\vartheta) \leq 1/4$, so bekommen wir für diese Werte $\varepsilon \geq 2.82/\sqrt{4000} \approx 0.0446$. Dies liefert im Vergleich mit der Abschätzung mittels Chebyshev Konfidenzintervalle, die nichtmal halb so lang sind, also wesentlich besser sind.
Man kann für dieses Beispiel noch schärfere Konfidenzintervalle mittels Beta-Quantilen konstruieren, worauf hier nicht weiter eingegangen wird.

Zur Konstruktion von Konfidenzintervallen zu einem vorgegebenen Irrtumsniveau α kann man allgemein folgendem Schema folgen:

(1) Zu jedem $\vartheta \in \Theta$ bestimme man ein möglichst kleines $C_\vartheta \in \mathcal{C}$ mit $\mathbb{P}_\vartheta(C_\vartheta) \geq 1-\alpha$. Haben die $\mathbb{P}_\vartheta$ z.B. alle Dichten f_ϑ, so kann man der Idee der ML-Schätzer folgend

$$C_\vartheta = \{x \in S \mid f_\vartheta(x) \geq c_\vartheta\}$$

setzen, wobei c_ϑ möglichst groß gewählt wird, so dass aber das Irrtumsniveau noch eingehalten wird.

(2) Man setzt dann $I(x) := \{g(\vartheta) \in \mathbb{R} \mid x \in C_\vartheta\}$.

Dieses Schema kann auch zu einem Bereich $I(x) \subset \mathbb{R}$ führen, der nicht notwendigerweise ein Intervall ist. Man lässt deshalb oft statt Intervalle auch allgemeinere Bereich in Definition 16.1 zu und spricht dann von Konfidenzbereichen. In vielen Standardmodellen führt dieses Schema allerdings tatsächlich auf Intervalle.

17 Testen

Wie in den vorigen beiden Abschnitten haben wir einen Stichprobenraum $(S, \mathcal{C})$ der möglichen Beobachtungsergebnisse sowie eine Familie von Verteilungen $\{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$, die aufgrund theoretischer Vorüberlegungen für das Experiment in Frage kommt. Wir wollen nun nicht mehr ϑ oder eine Funktion $g(\vartheta)$ schätzen oder ein Konfidenzintervall dafür angeben, sondern entscheiden, ob wir es im Lichte der Stichprobe für plausibel halten, dass der wahre Parameter ϑ zu einer vorgegebenen Teilmenge $\Theta_0 \subset \Theta$ gehört oder eben nicht. In den drei Beispielen aus Abschnitt 15 wollen wir also etwa testen, ob die Münze wohl fair ist oder nicht, ob im Teich z.B. eine gewisse Anzahl von Fischen überschritten wird oder nicht, oder, ob der Messwert aufgrund der Messungen zu einem Intervall gehört oder nicht.
Im Folgenden sei stets $(S, \mathcal{C})$ ein Stichprobenraum und $\{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ eine Familie von Verteilungen auf $(S, \mathcal{C})$. Dies wird auch als *parametrisches Modell* bezeichnet. Folgende Bezeichnungen sind üblich.

- *Nullhypothese* (H_0): „Der wahre Wert ϑ gehört zu Θ_0“, wobei $\Theta_0 \subset \Theta$.
- *Alternative* (H_1): „Der wahre Wert ϑ gehört zu Θ_1“, wobei $\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$.

Definition 17.1. Ein *Test* ist eine messbare Abbildung $T : S \to \{0,1\}$, wobei $T(x) = 1$ bedeutet, dass wir die Hypothese H_0 ablehnen, und $T(x) = 0$, dass wir H_0 nicht ablehnen. Die Menge $K = \{x \in S : T(x) = 1\}$ heißt *kritischer Bereich* von T.

Bemerkung 31. Man spricht von einem *Fehler 1. Art*, falls man die Hypothese fälschlich ablehnt, von einem *Fehler 2. Art*, falls man die Hypothese fälschlich annimmt.

Definition 17.2. Ein Test hat *(Signifikanz-)Niveau* $\alpha \in [0,1]$, falls

$$\forall\, \vartheta \in \Theta_0 : \mathbb{P}_\vartheta(K) \leq \alpha.$$

Bemerkung 32. Bei einem Test mit Niveau α ist die W-keit für einen Fehler 1. Art also durch α beschränkt. Häufig liegt eine Asymmetrie bezüglich der Fehler 1. und 2. Art vor, z.B. soll getestet werden, ob eine gewisse Krankheit vorliegt (H_0) oder nicht (H_1), um gegebenenfalls eine Behandlung durchzuführen. Führt nun die Nichtbehandlung eines Kranken zu irreparablem Schaden, die Behandlung eines Gesunden nur zu materiellem Schaden, so muss der Fehler 1. Art kontrolliert werden. Typische Vorgehensweise: Man fixiert ein $\alpha \in [0,1]$ und sucht unter den Tests zum Niveau α, d.h. mit $\mathbb{P}_\vartheta(K) \leq \alpha$ für $\vartheta \in \Theta_0$ denjenigen Test, der die W-keit für Fehler 2. Art minimiert.

Definition 17.3. Die Funktion $\beta : \Theta \to [0,1]$,

$$\beta(\vartheta) = \mathbb{P}_\vartheta(K)$$

heißt *Gütefunktion* des Tests. Für $\vartheta \in \Theta_1$ heißt $\beta(\vartheta)$ die *Macht des Tests* an der Stelle $\vartheta \in \Theta_1$.

Bemerkung 33. Für $\vartheta \in \Theta_0$ ist $\beta(\vartheta)$ die W-keit für einen Fehler 1. Art, für $\vartheta \in \Theta_1$ ist $1 - \beta(\vartheta)$ die W-keit für den Fehler 2. Art.

Beispiel 17.4. Wir betrachten Beispiel 15.2: $(S, \mathcal{C}) = (\{0,1\}^n, \mathcal{P}(\{0,1\}^n))$, $\Theta = [0,1]$, $\mathbb{P}_\vartheta(\{x\}) = \vartheta^{\sum x_i}(1-\vartheta)^{n-\sum x_i}$. Wir wählen als Hypothese H_0, dass die Münze fair ist, und testen gegen die Alternative H_1, dass $\vartheta \neq 1/2$ ist, d.h. $\Theta_0 = \{1/2\}$ und $\Theta_1 = [0,1] \setminus \{1/2\}$. Wir legen das Niveau zu $\alpha = 0{,}05$ fest.
Es ist plausibel, die Hypothese abzulehnen, falls $|\sum_{1 \leq i \leq n} x_i - n/2| > c$ für einen kritischen Wert $c > 0$. Wir wählen also $c > 0$ minimal mit

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{2}\right| > c\right) = \sum_{k\,:\,|k-n/2|>c} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \alpha = 0{,}05,$$

wobei $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1/2 = \mathbb{P}(X_i = 0)$. Z.B. für $n = 100$ erhält man $c = 10$. Damit ist der kritische Bereich

$$K = \Big\{x \in S : \Big|\sum_{i \leq 100} x_i - 50\Big| > 10\Big\}.$$

Was passiert mit dem Fehler 2. Art? Falls etwa $\vartheta = 0{,}6$, so ist $\beta(\vartheta) = 0{,}462$, d.h. der Fehler 2. Art hat W-keit $0{,}538$ für $\vartheta = 0{,}6$. Die Daten reichen nicht aus für eine bessere Trennschärfe. Möchte man etwa $\mathbb{P}_{1/2}(K) \leq 0{,}05$ und $\mathbb{P}_{0{,}6}(K) \geq 0{,}9$, so muss n erhöht werden.

Man nennt einen Test mit kritischem Bereich von der Form von K in Beispiel 17.4, bei dem an einem linken und rechten Rand (also im Beipiel für Summen unter 40 und über 60) abgelehnt wird, einen *zweiseitigen Test*.
Ein weiterer wichtiger Begriff bei statistischen Tests ist der p-*Wert*. Der p-Wert ist eine Funktion der Daten: Für $x \in S$ gibt der p-Wert $p(x)$ an, wie wahrscheinlich eine „mindestens so extreme“ Beobachtung wie x unter der Nullhypothese ist. „Mindestens so extrem“ kann man mittels einer Ordnung auf S fassen. In Beispiel 17.4 etwa wird man $\{y \in S : |\sum_i y_i - 50| \geq |\sum_i x_i - 50|\}$ als die Menge der Beobachtungen betrachten, die mindestens so extrem wie x sind, und den p-Wert deshalb als

$$p(x) := \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\Big(\Big\{y \in S : \Big|\sum_{i\leq 100} y_i - 50\Big| \geq \Big|\sum_{i\leq 100} x_i - 50\Big|\Big\}\Big)$$

erklären. Der Test lehnt also für die Beobachtung $x \in S$ genau dann ab, wenn $p(x) \leq \alpha$. Man sagt dann auch, dass die beobachtete Diskrepanz zur Nullhypothese zum Niveau α *signifikant* ist. Im Falle $p(x) > \alpha$ sagt man entsprechend, dass die Diskrepanz auf dem Niveau α nicht signifikant ist.
Es ist für den Anwender aussagekräftiger, einen p-Wert zu erhalten, als nur die Information über Annahme oder Ablehnung der Hypothese. Denn die Wahl des Signifikanzniveaus (typisch ist $\alpha = 0{,}05$) bleibt willkürlich, der p-Wert dagegen ist unabhängig vom Signifikanzniveau.

L3: Bemerkung für L3-Studierende: Im Kontext statistischer Tests kommt es häufig zu Fehlvorstellungen, die sich teils darum drehen, dass man aus den Beobachtungen schließen könne, dass Hypothese oder Alternative mit gewissen Wahrscheinlichkeiten gelten oder Hypothese bzw. Alternative gar bewiesen seien. Oder etwa, dass man die Wahrscheinlichkeit berechnet hätte, die Hypothese fälschlicherweise zu verwerfen. All dies macht hier keinen Sinn. Es können im Kontext unserer Hypothesentests grundsätzlich keine Wahrscheinlichkeiten über Hypothese oder Alternative angegeben werden.
Zu einer gegebenen Beobachtung $x \in S$ kann man unter der Hypothese (also einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_\vartheta$ der Hypothese) angeben, wie wahrscheinlich so eine Beobachtung oder eine mindestens so extreme Beobachtung ist. Je kleiner diese Wahrscheinlichkeit, desto weniger plausibel erscheint die Hypothese. Fällt diese Wahrscheinlichkeit unter das Signifikanzniveau, lehnen wir die Hypothese als zu wenig plausibel ab.
Um dies konkreter zu machen, betrachten wir nochmals Beispiel 17.4. Die Daten liefern den Wert $\sum_{1\leq i\leq n} x_i$, also wie oft Kopf geworfen wird. Die Hypothese ist, dass die Münze fair ist. Unter dieser theoretischen Annahme können wir die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass wir $\sum_{1\leq i\leq n} x_i$ oder eine noch größere Abweichung von $n/2$ als es $\sum_{1\leq i\leq n} x_i$ schon ist, beobachten. Der kritische Bereich ist so konstruiert, also c so gewählt, dass der Test ablehnt, wenn diese Wahrscheinlichkeit das Signifikanzniveau unterschreitet.
Die Hypothese ist also eine theoretische Annahme, die keine Wahrscheinlichkeit hat. Es ist zu beachten, dass die Begriffe „unwahrscheinlich“ und „wenig plausi-

bel“ im Kontext der Stochastik, speziell der Statistik, nicht annähernd synonym sind. Das Adjektiv „(un-)wahrscheinlich“ nimmt stets Bezug auf ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Es kann in diesem Kontext deshalb nur darüber gesprochen werden, wie (un-)wahrscheinlich *Ereignisse* sind. Was kein Ereignis ist, hat auch keine Wahrscheinlichkeit und kann deshalb auch nicht mehr oder weniger „wahrscheinlich“ sein.
Grundsätzlich kann man aus den Daten gegebenenfalls zwar schließen, dass die Hypothese wenig plausibel ist, nämlich eben, falls unter der Hypothese die Beobachtung oder eine mindestens so extreme Beobachtung entsprechend unwahrscheinlich ist. Aus den Daten jedoch auf die Hypothese zu schließen, ist nicht möglich. Die Hypothese kann höchstens nicht verworfen werden. (Prinzip der Falsifizierbarkeit)
Fehlvorstellungen sowie falsche Ausdrucksweisen rund um statistische Tests werden auch in einem fiktiven Dialog zwischen zwei Studierenden und einem Dozenten in [11, Seiten 107-110] diskutiert. Siehe auch [6, Abschnitt 30.15].

Bezeichnung 2. Falls $|\Theta_0| = 1$, so heißt die Hypothese *einfach*, falls $|\Theta_1| = 1$, so heißt die Alternative einfach. Im Falle $|\Theta_0| > 1$ bzw. $|\Theta_1| > 1$ heißen Hypothese bzw. Alternative *zusammengesetzt*.

Der Fall einer einfachen Alternative, d.h. $\Theta_1 = \{\vartheta_1\}$, führt auf ein Optimierungsproblem: Suche $K \subset S$, so dass $\mathbb{P}_{\vartheta_1}(K)$ maximal unter der Nebenbedingung $\mathbb{P}_\vartheta(K) \leq \alpha$ für $\vartheta \in \Theta_0$ wird. Der Fall einer zusammengesetzten Alternative, d.h. $|\Theta_1| > 1$: Falls eine Menge $K \subset S$ existiert, die für alle $\vartheta_1 \in \Theta_1$ optimal ist unter der Nebenbedingung $\mathbb{P}_\vartheta(K) \leq \alpha$ für $\vartheta \in \Theta_0$, so spricht man von einem gleichmäßig mächtigsten Test zum Niveau α. (UMP-Test, uniformly most powerful)

Konstruktion von Tests: Likelihood-Quotienten-Tests. Wir betrachten — wie bei ML-Schätzern — wieder zwei Fälle.

- S abzählbar, d.h. $\{\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ ist eine Familie diskreter W-Verteilungen.
- $S \subset \mathbb{R}^n$ und alle $\mathbb{P}_\vartheta$ haben Dichten f_ϑ.

Im Fall einfacher Hypothese und Alternative sei $\Theta = \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$, die Hypothese H_0 sei durch $\Theta_0 = \{\vartheta_0\}$ gegeben. Wir betrachten für jedes feste $x \in S$ wieder die Likelihood-Funktion

$$L_x(\vartheta) = \begin{cases} \mathbb{P}_\vartheta(\{x\}), & \text{falls } \mathbb{P}_{\vartheta_0}, \mathbb{P}_{\vartheta_1} \text{ diskret,} \\ f_\vartheta(x), & \text{falls } \mathbb{P}_{\vartheta_0}, \mathbb{P}_{\vartheta_1} \text{ mit Dichten,} \end{cases} \qquad \vartheta \in \Theta.$$

Definition 17.5. Der Quotient

$$\frac{L_x(\vartheta_1)}{L_x(\vartheta_0)}$$

heißt *Likelihood-Quotient*. Ein Likelihood-Quotienten-Test (LQT) von $\Theta_0 = \{\vartheta_0\}$ gegen $\Theta_1 = \{\vartheta_1\}$ ist ein Test $T : S \to \{0, 1\}$ der Form

$$T(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } L_x(\vartheta_1)/L_x(\vartheta_0) \geq c, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \tag{39}$$

mit $c > 0$.

Bemerkung 34. Die Idee eines LQT ist, dass hohe Werte des Likelihood-Quotienten für ϑ_1, d.h. für Ablehnung der Hypothese, sprechen. Der kritische Bereich des LQT ist gegeben durch

$$K = \left\{ x \in S : \frac{L_x(\vartheta_1)}{L_x(\vartheta_0)} \geq c \right\} \text{ und das Signifikanzniveau } \alpha \geq \mathbb{P}_{\vartheta_0}(K).$$

Man sagt auch, der LQT habe Signifikanzniveau $\alpha = \mathbb{P}_{\vartheta_0}(K)$.

Satz 17.6 (Lemma von Neyman-Pearson)**.** Jeder LQT T ist im folgenden Sinne optimal: Ist $\widetilde{T}$ ein weiterer Test mit $\mathbb{P}_{\vartheta_0}(\widetilde{K}) \leq \mathbb{P}_{\vartheta_0}(K)$, wobei $K, \widetilde{K}$ die kritischen Bereiche von T und $\tilde{T}$ bezeichnen, so hat $\widetilde{T}$ eine mindestens ebenso große Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art wie T:

$$\mathbb{P}_{\vartheta_0}(\widetilde{K}) \leq \mathbb{P}_{\vartheta_0}(K) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}_{\vartheta_1}(\widetilde{K}) \leq \mathbb{P}_{\vartheta_1}(K).$$

Beweis.
Wir betrachten den Fall diskreter Räume S. Für den Fall mit Dichten kann man analog schließen. Wir haben $\mathbb{P}_{\vartheta_0}(\widetilde{K}) \leq \mathbb{P}_{\vartheta_0}(K)$. Sei $A := \{x \in S : T(x) > \widetilde{T}(x)\}$. Für $x \in A$ ist $T(x) = 1$, gemäß (39) also $\mathbb{P}_{\vartheta_1}(\{x\}) \geq c\mathbb{P}_{\vartheta_0}(\{x\})$. Auf $B := \{x \in S : T(x) < \widetilde{T}(x)\}$ ist $T(x) = 0$, also $\mathbb{P}_{\vartheta_1}(\{x\}) < c\mathbb{P}_{\vartheta_0}(\{x\})$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\vartheta_1}(K) - \mathbb{P}_{\vartheta_1}(\widetilde{K}) &= \mathbb{E}_{\vartheta_1}[\mathbb{1}_K] - \mathbb{E}_{\vartheta_1}[\mathbb{1}_{\widetilde{K}}] = \mathbb{E}_{\vartheta_1}[T] - \mathbb{E}_{\vartheta_1}[\widetilde{T}] \\
&= \sum_{x \in S} \left(T(x) - \widetilde{T}(x) \right) \mathbb{P}_{\vartheta_1}(\{x\}) \\
&= \sum_{x \in A} \left(T(x) - \widetilde{T}(x) \right) \mathbb{P}_{\vartheta_1}(\{x\}) + \sum_{x \in B} \left(T(x) - \widetilde{T}(x) \right) \mathbb{P}_{\vartheta_1}(\{x\}) \\
&\geq \sum_{x \in A} \left(T(x) - \widetilde{T}(x) \right) c\mathbb{P}_{\vartheta_0}(\{x\}) + \sum_{x \in B} \left(T(x) - \widetilde{T}(x) \right) c\mathbb{P}_{\vartheta_0}(\{x\}) \\
&= c \sum_{x \in S} \left(T(x) - \widetilde{T}(x) \right) \mathbb{P}_{\vartheta_0}(\{x\}) = c \left(\mathbb{E}_{\vartheta_0}[T] - \mathbb{E}_{\vartheta_0}[\widetilde{T}] \right) \\
&= c \left(\mathbb{P}_{\vartheta_0}(K) - \mathbb{P}_{\vartheta_0}(\widetilde{K}) \right) \geq 0.
\end{aligned}$$

∎

Im Fall zusammengesetzter Hypothesen bzw. Alternativen, also $|\Theta| > 2$, kann man analog vorgehen: Für $x \in S$ sei

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\vartheta \in \Theta} L_x(\vartheta)}{\sup_{\vartheta \in \Theta_0} L_x(\vartheta)}.$$

Dann gilt $\lambda(x) \geq 1$ für alle $x \in S$. Große Werte von $\lambda(x)$ legen wieder nahe, die Hypothese zu verwerfen. Man wählt dann den Test mit kritischem Bereich $K = \{x \in S : \lambda(x) \geq c\}$ mit einem $c > 1$.

Bemerkung 35. Falls $\Theta = \{\vartheta_0, \vartheta_1\}$ und $c > 1$, so gilt

$$\lambda(x) = \frac{\max\{L_x(\vartheta_0), L_x(\vartheta_1)\}}{L_x(\vartheta_0)} \geq c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{L_x(\vartheta_1)}{L_x(\vartheta_0)} \geq c.$$

Die Vorgehensweise für zusammengesetzte Hypothesen bzw. Alternativen ist also tatsächlich eine Verallgemeinerung des LQT.

5 Informationstheorie

In diesem Kapitel wird die Entropie definiert und der Quellenkodierungssatz erläutert.

18 Entropie

Definition 18.1. Eine (Informations-)*Quelle* ist ein Paar $(S, \mathbb{P})$, bestehend aus einer höchstens abzählbaren Menge $S \neq \emptyset$ von *Symbolen* (oder *Signalen*) und einem diskreten Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(S, \mathcal{P}(S))$.

Es soll der „Informationsgehalt“ von Quellen gemessen werden. Die Quelle $(S, \mathbb{P})$ liefert Symbole, die zunächst unbekannt sind und von der Quelle generiert werden. Die Symbole sind zufällig und gemäß $\mathbb{P}$ verteilt. An den Informationsgehalt von Quellen stellen wir axiomatisch einige Anforderungen. Zunächst entwickeln wir eine Maßzahl I für den Informationsgehalt eines einzelnen generierten Symbols: Sei $s \in S$ und $p_s := \mathbb{P}(\{s\})$ die W-keit, dass die Quelle s generiert.

- $p_s = 1$: In diesem Fall liefert die Quelle (fast sicher) das Symbol s. Dies interpretieren wir als keine Unsicherheit/Überraschung bzw. keine Information: $I(p_s) = I(1) := 0$.
- $p_s > 0$ sehr klein: Generiert die Quelle trotz kleinem p_s dennoch das Symbol s, so ist die Unsicherheit/Überraschung groß, $I(p_s)$ soll deshalb groß sein.

Wir fordern:

(a) $I(1) = 0$,

(b) $p \mapsto I(p)$ ist monoton fallend,

(c) I ist stetig,

(d) $I(p_1 \cdot p_2) = I(p_1) + I(p_2)$.

Eigenschaft (d) bedeutet: Werden zwei Symbole unabhängig voneinander empfangen, so addieren sich deren Informationen. Insbesondere folgt aus c) und d), dass $I(p^r) = rI(p)$ für alle $r > 0$ und $p \in [0, 1]$.
In der Analysis zeigt man, dass eine Funktion I mit (a)–(d) von der Form $I(p) = K \cdot \log_b p$ ist, mit $b > 0, K < 0$.

Definition 18.2. Für eine Quelle $(S, \mathbb{P})$ ist die *Information* (Unsicherheit) eines generierten Symbols $s \in S$ mit $p_s = \mathbb{P}(\{s\})$ definiert als:

$$I(p_s) := -\log_2 p_s, \quad I(0) := 0.$$

Mit der Information eines generierten Symbols kann nun die Information der Quelle definiert werden: Die Information einer Quelle soll nun die mittlere Information eines durch die Quelle generierten Symbols sein, d.h. der Erwartungswert der Information eines zufälligen von der Quelle gesendeten Signals.

Definition 18.3. Die *Entropie* einer Quelle $(S, \mathbb{P})$ mit $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ und $p_i := \mathbb{P}(\{s_i\})$ ist gegeben durch

$$H_2(\mathbb{P}) := \sum_{i=1}^{\infty} p_i I(p_i) = -\sum_{i=1}^{\infty} p_i \log_2 p_i.$$

Dabei wird $x \log_2 x := 0$ für $x = 0$ gesetzt. (Dies setzt die Funktion $x \mapsto x \log_2 x$ stetig nach 0 fort.)

Bemerkung 36. Für endliches $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ und $p_i = \mathbb{P}(\{s_i\})$ wird auch

$$H(p_1, \ldots, p_n) := H(\mathbb{P})$$

geschrieben. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist H dann eine Funktion $H : \Delta_n \to [0, \infty)$ mit dem Simplex $\Delta_n = \{(p_1, \ldots, p_n) \in [0,1]^n : \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$. Damit kann H auch als Funktion auf $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ definiert werden, ist aber zudem für abzählbar unendliche Vektoren $(p_i)_{i \geq 1}$ in $[0,1]$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ definiert.
Für ZVe X mit Werten in einer höchstens abzählbaren Menge S wird die Entropie von X durch

$$H(X) := H(\mathbb{P}_X)$$

definiert. Wir untersuchen nun zunächst den Wertebereich von $H(\mathbb{P})$ für W-Verteilungen $\mathbb{P}$ mit endlichem S.

Lemma 18.4. Für $(p_1, \ldots, p_n), (q_1, \ldots, q_n) \in [0,1]^n$, $1 = \sum_{i=1}^n p_i \geq \sum_{i=1}^n q_i$ gilt:

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i \leq -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 q_i.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $(p_1, \ldots, p_n) = (q_1, \ldots, q_n)$.

Beweis.
Es gilt $\log_2 x \leq c(x-1)$ für alle $x > 0$ mit passendem $c > 0$, z.B. $c = 1/\ln 2$. Dabei gilt Gleichheit genau für $x = 1$. Seien $p_i, q_i > 0$. Dann folgt

$$\log_2 \frac{q_i}{p_i} \leq c\left(\frac{q_i}{p_i} - 1\right)$$

mit Gleichheit genau für $p_i = q_i$, also $p_i \log_2 \frac{q_i}{p_i} \leq c q_i - c p_i$ und damit

$$p_i \log_2 \frac{1}{p_i} \leq p_i \log_2 \frac{1}{q_i} + c q_i - c p_i \tag{40}$$

mit Gleichheit genau für $p_i = q_i$. Ungleichung (40) ist ebenfalls wahr für $p_i = 0$ (wegen $0 \leq q_i$) und für $p_i \neq 0$ und $q_i = 0$ (rechte Seite ist dann ∞). Die Ungleichung (40) gilt also für beliebige $p_i, q_i \geq 0$ mit Gleichheit genau für $p_i = q_i$. Summation in (40) über i liefert nun

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \frac{1}{q_i} + \underbrace{c \sum_{i=1}^{n} q_i - c \sum_{i=1}^{n} p_i}_{\leq 0} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \frac{1}{q_i}.$$

Dies ist die Behauptung. Gleichheit gilt genau für $p_i = q_i$ für $i = 1, \ldots, n$. ∎

Satz 18.5. Sei $\mathbb{P}$ eine W-Verteilung auf $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Dann gilt

$$0 \leq H_2(\mathbb{P}) \leq \log_2 n.$$

Zudem gilt $H_2(\mathbb{P}) = \log_2 n$ genau für die Gleichverteilung $\mathbb{P}$ auf S und $H_2(\mathbb{P}) = 0$ genau, falls $\mathbb{P}(\{s_i\}) = 1$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweis.
Seien $p_i = \mathbb{P}(\{s_i\})$ und $q_i := \frac{1}{n}$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann folgt mit Lemma 18.4

$$H_2(\mathbb{P}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \frac{1}{1/n} = \log_2 n \sum_{i=1}^{n} p_i = \log_2 n.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $p_i = q_i = 1/n$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt, d.h. wenn $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf S ist. Falls $H_2(\mathbb{P}) = 0$ ist, so gilt $p_i \log \frac{1}{p_i} = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ also $p_i \in \{0, 1\}$ für $i = 1, \ldots, n$. ∎

19 Codierung von Quellen

Ziel dieses Abschnitts ist es, Symbole einer Informationsquelle möglichst effizient zu codieren.

Definition 19.1. Sei $(S, \mathbb{P})$ eine Quelle. Ein *binärer Code* ist eine injektive Abbildung

$$k : S \to \bigcup_{n \geq 1} \{0, 1\}^n.$$

Für $s \in S$ wird $k(s)$ als *Codewort von* s bezeichnet. Ferner sei $\ell : S \to \mathbb{N}$, $s \mapsto$"Anzahl der Komponenten von $k(s)$". Die Zahl $\ell(s)$ heißt *Codewortlänge* von s.

Bemerkung 37. Um effizient zu codieren, sind kurze Codewortlängen von Vorteil, allerdings muss dabei gewährleistet sein, dass Codewörter eindeutig zu entziffern sind. Wir fordern deshalb für Codes die *Präfix-Eigenschaft*: Kein Codewort ist Präfix eines anderen Codeworts. Man sagt auch, der Code sei *präfixfrei*. Im Weiteren werden wir nur präfixfreie binäre Codes betrachten. Wir können diese veranschaulichen, indem die Codewörter mit Blättern eines (gewurzelten) Binärbaums identifiziert werden, vgl. Abbildung 2.

Satz 19.2 (Fano-Kraft Ungleichung)**.** Sei k ein präfixfreier binärer Code für S und $\ell : S \to \mathbb{N}$ die Funktion der Codewortlängen. Dann gilt

$$\sum_{s \in S} 2^{-\ell(s)} \leq 1.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn der Code einem vollen Binärbaum entspricht.

Beweis.
Wir betrachten einen binären Baum, dessen Blätter die Codewörter von k enthalten und konstruieren in diesem Baum einen zufälligen Pfad. Dazu starten wir an der Wurzel und werfen eine faire Münze, um festzulegen, ob der zufällige Pfad der 0-Kante oder der 1-Kante folgt. Falls die entsprechende Kante im Baum nicht existiert, terminiert das Verfahren. Andernfalls führt die Kante zu einem weiteren Knoten. Ist dieser ein Blatt, so stoppen wir, andernfalls werfen wir unabhängig eine faire Münze und iterieren das Verfahren, um den Pfad fortzusetzen. Es bezeichne A_s das Ereignis, dass das Verfahren in einem Blatt mit Codewort $k(s)$ stoppt. Nach Konstruktion folgt, dass $\mathbb{P}(A_s) = (1/2)^{\ell(s)}$ gilt für alle $s \in S$. Zudem sind die Ereignisse A_s für $s \in S$ paarweise disjunkt. Es folgt also

$$1 \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{s\in S} A_s\right) = \sum_{s\in S} \mathbb{P}(A_s) = \sum_{s\in S} 2^{-\ell(s)}.$$

Dies ist die Fano-Kraft Ungleichung. Das Argument zeigt zudem, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn jeder innere Knoten zwei Kinder besitzt, der binäre Baum also voll ist. ∎

Korollar 19.3. Sei $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ und $\ell_1, \ldots, \ell_m \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^{m} 2^{-\ell_j} \leq 1$. Dann existiert ein binärer präfixfreier Code für S mit Codewortlängen $\ell(s_j) = \ell_j$ für $j = 1, \ldots, m$.

Beweis.
Wir nehmen ohne Einschränkung $\ell_1 \leq \cdots \leq \ell_m$ an und führen Induktion über m. Für $m = 1$ ist die Behauptung trivial. Sei nun die Behauptung für je $m-1$ Codewortlängen bewiesen. Für das Teilalphabet $\{s_1, \ldots, s_{m-1}\}$ existiert dann nach Induktionsvorraussetzung ein binärer präfixfreier Code. Für seine Codewortlängen gilt dann echte Ungleichung in Satz 19.2. Damit lässt sich dieser Code fortsetzen. Da für s_m ein Codewort mit maximaler Länge ℓ_m benötigt wird, kann der Code für $\{s_1, \ldots, s_{m-1}\}$ passend zu einem Code für S fortgesetzt werden. ∎

Definition 19.4. Seien $(S, \mathbb{P})$ eine Quelle, $k : S \to \bigcup_n \{0,1\}^n$ ein präfixfreier Code sowie $\ell : S \to \mathbb{N}$ die Funktion der Codewortlängen. Sei ferner X eine ZVe in S mit Verteilung $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}$ und für alle $s \in S$ sei $p_s = \mathbb{P}(X = s)$. Als *mittlere Codewortlänge* bezeichnen wir dann

$$\mathbb{E}\left[\ell(X)\right] = \sum_{s\in S} p_s \ell(s).$$

Satz 19.5 (Quellencodierungssatz)**.** Sei $(S, \mathbb{P})$ eine Quelle und X eine ZVe in S mit Verteilung $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}$. Für jeden präfixfreien binären Code gilt

$$\mathbb{E}\left[\ell(X)\right] \geq H_2(X) = H_2(\mathbb{P}_X).$$

Beweis.

Es existert eine Konstante $c > 0$ mit $\log_2 x \leq c(x-1)$ für alle $x > 0$, z.B. $c = 1/\ln(2)$. Für jeden präfixfreien binären Code gilt

$$\begin{aligned} H_2(X) - \mathbb{E}[\ell(X)] &= \sum_{s\in S} p_s \left(\log_2 \frac{1}{p_s} - \ell(s)\right) = \sum_{s\in S} p_s \log_2 \frac{2^{-\ell(s)}}{p_s} \\ &\leq \sum_{s\in S} p_s c \left(\frac{2^{-\ell(s)}}{p_s} - 1\right) = c \underbrace{\sum_{s\in S} 2^{-\ell(s)}}_{\leq 1} - \underbrace{c \sum_{s\in S} p_s}_{=c\cdot 1} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. ∎

Beispiel 19.6 (Shannon-Code)**.** Sei $(S, \mathbb{P})$ eine Quelle. Es bezeichne $p_s = \mathbb{P}(\{s\})$ und $\ell_s = \lceil -\log_2 p_s \rceil$ für $s \in S$. Es gilt also

$$-\log_2 p_s \leq \ell_s \leq -\log_2 p_s + 1.$$

Nach Korollar 19.3 existiert ein zugehöriger Code mit Codewortlängen $\ell(s) = \ell_s$, denn es gilt $\sum_{s\in S} 2^{-\ell_s} \leq \sum_{s\in S} p_s = 1$. Solch einen Code bezeichnet man als *Shannon-Code*. Er benötigt zur Codierung im Mittel höchstens ein Bit pro Symbol mehr als jeder andere präfixfreie binäre Code, denn

$$\mathbb{E}[\ell(X)] = \sum_{s\in S} p_s \ell_s \leq -\sum_{s\in S} p_s \log_2 p_s + \sum_{s\in S} p_s = H(\mathbb{P}) + 1,$$

und $H(\mathbb{P})$ ist nach dem Quellencodierungssatz eine untere Schranke für die mittlere Codewortlänge für jeden präfixfreien binären Code.

Beispiel 19.7 (Huffman-Code)**.** Sei $(S, \mathbb{P})$ eine Quelle mit endlichem S und $p_s = \mathbb{P}(\{s\})$. Ein (bezüglich der mittleren Codewortlänge) optimaler präfixfreier binärer Code für $(S, \mathbb{P})$ muss die folgenden Eigenschaften haben, denn andernfalls könnte man ihn jeweils direkt verbessern:

(i) Ein Knoten, der kein Blatt ist, hat genau zwei Kinder.

(ii) Falls $p_{s_1} < p_{s_2}$ für $s_1, s_2 \in S$, so gilt $\ell(s_1) \geq \ell(s_2)$. Andernfalls tausche man die Codewörter für s_1 und s_2 und vermindert damit die mittlere Codewortlänge.

(iii) Haben $s_1, s_2 \in S$ die kleinsten Wahrscheinlichkeiten, d.h. $p_{s_1} \leq p_{s_2} \leq p_s$ für alle $s \in S \setminus \{s_1, s_2\}$, dann gilt: $\ell(s_1) = \ell(s_2) \geq \ell(s)$ für alle $s \in S \setminus \{s_1, s_2\}$.

(iv) O.E. sind $s_1, s_2 \in S$ mit minimalen W-keiten also $p_{s_1} \leq p_{s_2} \leq p_s$ für alle $s \in S \setminus \{s_1, s_2\}$ Geschwister (haben einen gemeinsamen direkten Vorfahren im Baum). Mit S muss dann auch

$$\tilde{S} = (S \setminus \{s_1, s_2\}) \cup \{\langle s_1 s_2 \rangle\}$$

betrachtet werden, wobei s_1, s_2 zu einem neuen Buchstaben $\langle s_1 s_2 \rangle$ verschmelzen. Die neue W-Verteilung $\tilde{\mathbb{P}}$ auf $\tilde{S}$ ist dann gegeben durch

$$\tilde{\mathbb{P}}(\{s\}) = \mathbb{P}(\{s\}), \text{ falls } s \in S \setminus \{s_1, s_2\} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbb{P}}(\{\langle s_1 s_2 \rangle\}) = \mathbb{P}(\{s_1\}) + \mathbb{P}(\{s_2\}). \quad (41)$$

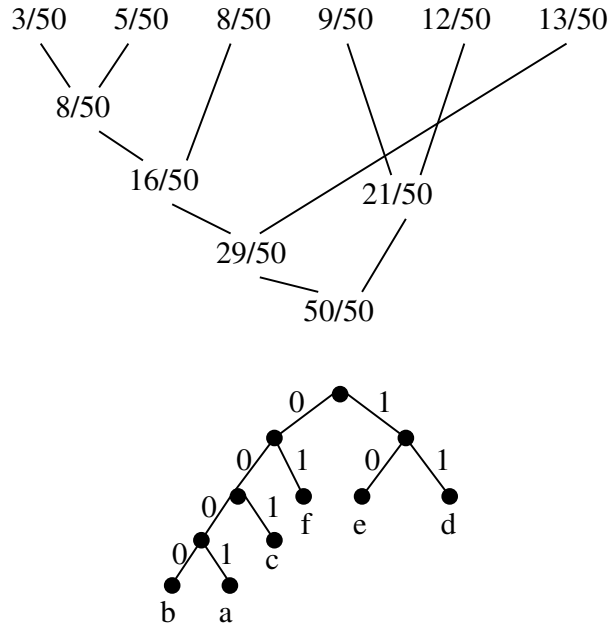


Abbildung 2: Beispiel zur Konstruktion eines Huffman-Codes für $(S, \mathbb{P})$ mit $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ mit $\mathbb{P}(\{a\}) = \frac{3}{50}$, $\mathbb{P}(\{b\}) = \frac{5}{50}$, $\mathbb{P}(\{c\}) = \frac{8}{50}$, $\mathbb{P}(\{d\}) = \frac{9}{50}$, $\mathbb{P}(\{e\}) = \frac{12}{50}$ und $\mathbb{P}(\{f\}) = \frac{13}{50}$. Die mittlere Codewortlänge des Huffman-Codes ergibt sich zu 2,48. Der Shannon-Code für diese Quelle hat eine mittlere Codewortlänge von 3,02. Die Entropie der Quelle ist $H_2(\mathbb{P}) = 2{,}443$.

Dies liefert umgekehrt die Konstruktion der *Huffman-Codes*: Man verschmilzt gemäß (iv) zwei Symbole kleinster Wahrscheinlichkeit zu einem neuen Symbol mit entsprechend aktualisierten Wahrscheinlichkeiten gemäß (41) und wiederholt die Prozedur iterativ bis ein Symbol mit W-keit 1 verbleibt. Dann liest man den so entstandenen Baum von der Wurzel (dem Symbol mit Gewicht 1) zu den Blättern, um den Code zu erhalten, vgl. Abbildung 3.

BSc: Bemerkung für Bachelor-Studierende: Wer mehr über relative Entropien, gemeinsame Entropien und bedingte Entropien erfahren möchte, sowie über die Kapazität gestörter Kanäle, redundantes Kodieren sowie Shannons Kanalcodierungssatz, findet eine schöne Darstellung in den Abschnitten 24 und 25 von [9]. Auf Claude Shannon, der als Begründer der Informationstheorie gilt, geht übrigens auch Satz 19.5 zurück.

6 Markov-Ketten

Es werden nun am Beispiel der Markov-Ketten stochastische Modelle betrachtet, die zusätzlich eine zeitliche Dynamik enthalten.

20 Die Markovsche Eigenschaft

An einem Skilift starten zu den Zeitpunkten $n \in \mathbb{N}_0$ Tellerbügel, die je eine Person befördern können. Zwischen den Zeitpunkten n und $n+1$ kommen Y_n neue Skifahrer am Lift an. Es sei $(Y_n)_{n\geq 0}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariable. Sei X_n die Länge der Warteschlange unmittelbar vor der Abfahrt des Tellerbügels zur Zeit n. In diesem Warteschlangenmodell gilt offenbar für all $n \geq 1$, dass

$$X_n = \max\{0, X_{n-1} - 1\} + Y_{n-1}.$$

Es sei $X_0 = i_0$ eine bekannte Zahl zu Beobachtungsbeginn. Da Y_n unabhängig von $Y_0, \ldots, Y_{n-1}$ ist, ist Y_n auch unabhängig von $(X_0, \ldots, X_n)$, da $(X_0, \ldots, X_n)$ eine Funktion von $(Y_0, \ldots, Y_{n-1})$ ist, vgl. Satz 5.7. Damit gilt für $i_0, i_1, \ldots, i_{n+1} \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) \\
&= \mathbb{P}(Y_n = i_{n+1} - \max\{i_n - 1, 0\}, X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\
&= \mathbb{P}(Y_n = i_{n+1} - \max\{i_n - 1, 0\}) \cdot \mathbb{P}(X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0),
\end{aligned}$$

und es folgt

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(Y_n = i_{n+1} - i_n - 1).$$

Die bedingte W-keit hängt also gar nicht von den Größen der Warteschlange zu den Zeitpunkten $0, 1, \ldots, n-1$ ab. Dies ist eine wesentliche, häufig auftretende Eigenschaft eines sich „zeitlich entwickelnden zufälligen Systems“.

Definition 20.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, $T \neq \emptyset$ beliebige Indexmenge und $(S, \mathcal{S})$ ein messbarer Raum. Eine Familie $\{X_t : t \in T\}$ von ZVen mit Werten in S heißt *stochastischer Prozess* mit *Parameterbereich* T und *Zustandsraum* S.

Bemerkung 38. Im Folgenden wird S stets höchstens abzählbar sein, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(S)$ und $T = \mathbb{N}_0$. Statt $\{X_t : t \in T\}$ schreibt man auch $(X_t)_{t\in T}$.

Definition 20.2. Eine *Markov-Kette* ist ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit höchstens abzählbarem Zustandsraum S, der die *Markovsche Eigenschaft* besitzt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $s_0, \ldots, s_{n+1} \in S$ mit $\mathbb{P}(X_0 = s_0, \ldots, X_n = s_n) > 0$ gilt

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1} \,|\, X_0 = s_0, \ldots, X_n = s_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1} \,|\, X_n = s_n).$$

Bemerkung 39. Folgende Interpretation ist nützlich: X_n beschreibt den Zustand eines Systems zur Zeit n. Die Markovsche Eigenschaft bedeutet, dass die W-keit, zur Zeit $n+1$ in einen beliebigen Zustand s_{n+1} zu gelangen, nur vom Zustand s_n zur Zeit n (und n) abhängt, nicht aber von den Zuständen, in welchen sich das System früher befand.

L3: Bemerkung für L3-Studierende: Markov-Ketten können als mehrstufige Zufallsexperimente (Jahrgangsstufen 9/10 sowie Qualifikationsphase Q3.1) aufgefasst werden. Sie sind die einfachsten Modelle von Folgen von Zufallsvariablen, die nicht aus unabhängigen Zufallsvariablen bestehen, mit zahlreichen Anwendungen in den Natur- und Lebenswissenschaften und engen Verbindungen zu anderen mathematischen Gebieten (etwa der Potentialtheorie).
Das Verhalten von Markov-Ketten zu studieren, fördert stochastisches Denken sowie die Intuition für asymptotische stochastische Vorgänge und hat viele Bezüge zur Analysis und Linearen Algebra. Markov-Ketten sind deshalb ein beliebter Gegenstand der Didaktik der Stochastik.

Lemma 20.3. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $s_0, \ldots, s_n \in S$ gilt:

$$\mathbb{P}(X_0 = s_0, \ldots, X_n = s_n) = \mathbb{P}(X_0 = s_0)\,\mathbb{P}(X_1 = s_1 | X_0 = s_0) \cdots \mathbb{P}(X_n = s_n | X_{n-1} = s_{n-1}).$$

Beweis.
Es ist

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_0 = s_0, \ldots, X_n = s_n)\\
&= \mathbb{P}(X_n = s_n | X_0 = s_0, \ldots, X_{n-1} = s_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(X_0 = s_0, \ldots, X_{n-1} = s_{n-1})\\
&\overset{\text{ME}}{=} \mathbb{P}(X_n = s_n | X_{n-1} = s_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(X_0 = s_0, \ldots, X_{n-1} = s_{n-1})\\
&\overset{\text{Ind}}{=} \mathbb{P}(X_n = s_n) \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = s_{n-1} | X_{n-2} = s_{n-2}) \cdots \mathbb{P}(X_1 = s_1 | X_0 = s_0).
\end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung. ∎

Satz 20.4. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette und $0 < n < N$. Dann gilt für alle $s_n \in S$ und $E \subset S^n$, $F \subset S^{N-n}$

$$\mathbb{P}((X_{n+1}, \ldots, X_N) \in F \,|\, X_n = s_n, (X_0, \ldots, X_{n-1}) \in E) = \mathbb{P}((X_{n+1}, \ldots, X_N) \in F \,|\, X_n = s_n).$$

Zum Beweis von Satz 20.4 zeigen wir zunächst:

Lemma 20.5. Seien $A, B, C_1, C_2, \ldots$ Ereignisse, wobei $C_1, C_2, \ldots$ paarweise disjunkt sind mit $\mathbb{P}(B \cap C_i) > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die W-keiten $\mathbb{P}(A \,|\, B \cap C_i)$ seien für $i \in \mathbb{N}$ alle gleich. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A \,|\, B \cap C_1) = \mathbb{P}\Big(A \,\Big|\, B \cap \bigcup_{i\geq 1} C_i\Big).$$

Beweis.
Es ist mit $C := \bigcup_{i\geq 1} C_i$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \,|\, B \cap C_1) \cdot \mathbb{P}(B \cap C) &= \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(A \,|\, B \cap C_i) \cdot \mathbb{P}(B \cap C_i) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(A \cap B \cap C_i)\\
&= \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A \,|\, B \cap C) \cdot \mathbb{P}(B \cap C).
\end{aligned}$$

Kürzen von $\mathbb{P}(B \cap C)$ liefert die Behauptung. ∎

Beweis von Satz 20.4.
Wir betrachten zunächst den Spezialfall $F = \{(s_{n+1}, \dots, s_N)\}$ mit $(s_{n+1}, \dots, s_N) \in S^{N-n}$ und bezeichnen $p_k(j|i) := \mathbb{P}(X_{k+1} = s_j | X_k = s_i)$. Für $(s_0, \dots, s_{n-1}) \in S^n$ beliebig gilt nach Lemma 20.3

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}((X_{n+1}, \dots, X_N) \in F \,|\, X_n = s_n, (X_0, \dots, X_{n-1}) = (s_0, \dots, s_{n-1})) \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_0 = s_0, \dots, X_N = s_N)}{\mathbb{P}(X_0 = s_0, \dots, X_n = s_n)} = \frac{\mathbb{P}(X_0 = s_0) p_0(1|0) \cdots p_{N-1}(N|N-1)}{\mathbb{P}(X_0 = s_0) p_0(1|0) \cdots p_{n-1}(n|n-1)} \\
&= p_n(n+1|n) p_{n+1}(n+2|n+1) \cdots p_{N-1}(N|N-1) =: p.
\end{aligned}$$

Damit ist p insbesondere unabhängig von $s_0, \dots, s_{n-1}$. Nach Lemma 20.5 gilt dann für beliebige disjunkte Vereinigungen C von Mengen der Form $\{(X_0, \dots, X_{n-1}) = (s_0, \dots, s_{n-1})\}$, dass

$$\mathbb{P}((X_{n+1}, \dots, X_N) \in F \,|\, \{X_n = s_n\} \cap C) = p.$$

Mit $C = \{(X_0, \dots, X_{n-1}) \in E\}$ und $C = \Omega$ erhält man die Behauptung für den Fall $F = \{(s_{n+1}, \dots, s_N)\}$. Nun kann man für allgemeines $F \subset S^{N-n}$ aber über $(s_{n+1}, \dots, s_N) \in F$ summieren und erhält mit der σ-Additivität die Behauptung. ∎

Satz 20.6 (Chapman-Kolmogorov-Gleichung)**.** Sei $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Markov-Kette. Dann gilt für alle $0 \leq k < m < n$ und alle $u, v \in S$:

$$\mathbb{P}(X_n = v \,|\, X_k = u) = \sum_{s \in S} \mathbb{P}(X_m = s \,|\, X_k = u) \cdot \mathbb{P}(X_n = v \,|\, X_m = s).$$

Beweis.
Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_k = u, X_n = v) &= \sum_{s \in S} \mathbb{P}(X_k = u, X_n = v, X_m = s) \\
&= \sum_{s \in S} \mathbb{P}(X_k = u, X_m = s) \cdot \mathbb{P}(X_n = v \,|\, X_k = u, X_m = s) \\
&\overset{\text{Satz 20.4}}{=} \sum_{s \in S} \mathbb{P}(X_k = u, X_m = s) \cdot \mathbb{P}(X_n = v \,|\, X_m = s).
\end{aligned}$$

Dividieren durch $\mathbb{P}(X_k = u)$ auf beiden Seiten liefert die Behauptung. ∎

Bisher hingen die W-keiten $\mathbb{P}(X_{n+1} = v \,|\, X_n = u)$ formal auch von n ab. In vielen Anwendungen trifft man auf Markov-Ketten, bei denen diese Übergangswahrscheinlichkeit unabhängig von n sind.

Definition 20.7. Eine Markov-Kette heißt *homogen* (oder Kette mit stationären Übergangswahrscheinlichkeiten), falls für alle $u, v \in S$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = v \,|\, X_n = u) =: p_{uv}$$

unabhängig von n ist.

Bemerkung 40. Mit p_{uv} wie in der vorigen Definition ist $P := (p_{uv})_{u,v\in S}$ eine stochastische Matrix, d.h. es gilt für alle $u, v \in S$, dass $p_{uv} \geq 0$ und für alle $u \in S$ gilt $\sum_{v\in S} p_{uv} = 1$.

Definition 20.8. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine homogene Markov-Kette. Dann heißt $P = (p_{uv})_{u,v\in S}$ *Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten* und die Verteilung $\pi = \mathbb{P}_{X_0}$ *Startverteilung*. Ferner bezeichnet $\pi_u := \pi(\{u\})$ für $u \in S$.

Bemerkung 41. Durch Startverteilung und Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten sind die gemeinsamen Verteilungen der X_n festgelegt: Für alle $(s_0, \ldots, s_n) \in S^{n+1}$ gilt

$$\mathbb{P}((X_0, \ldots, X_n) = (s_0, \ldots, s_n)) = \pi_{s_0} p_{s_0,s_1} p_{s_1,s_2} \cdots p_{s_{n-1},s_n}. \tag{42}$$

Beispiel 20.9. Im vorigen Beispiel der Warteschlange am Tellerlift ist für unabhängige $(Y_n)_{n\geq 0}$ die Länge der Warteschlange zu den einzelnen Zeitpunkten gegeben durch

$$X_n = \max\{0, X_{n-1} - 1\} + Y_{n-1}.$$

Wir haben

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) &= \mathbb{P}(Y_n = i_{n+1} - \max\{i_n - 1, 0\}) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n).\end{aligned}$$

$(X_n)_{n\geq 1}$ ist also eine Markov-Kette. Sie ist homogen, falls $Y_0, Y_1, \ldots$ identisch verteilt sind. Es ist dann

$$p_{ij} = \mathbb{P}(Y_n = j - \max\{i - 1, 0\})$$

unabhängig von n.

Häufig wird die Verteilung einer homogenen Markov-Kette direkt durch Angabe der Startverteilung und Übergangsmatrix (Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten) definiert:

Beispiel 20.10 (Einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$)**.** Ein Teilchen bewege sich in jedem Zeitabschnitt $n \to n + 1$ von seinem Ort $x \in \mathbb{Z}^d$ auf dem Gitter $\mathbb{Z}^d$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu einem der $2d$ benachbarten Punkte. Der Zustandsraum ist $S = \mathbb{Z}^d$, und für $x, y \in \mathbb{Z}^d$ ist

$$p_{xy} = \begin{cases} \frac{1}{2d}, & \text{falls } \|x - y\| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Hier bezeichnet $\|\cdot\|$ die euklidische Norm.) Gibt man zudem eine Startverteilung π vor, so ist die Verteilung der Irrfahrt nach (42) festgelegt. Man nennt diese Markov-Kette die *einfache symmetrische Irrfahrt* auf $\mathbb{Z}^d$.

Definition 20.11. Für eine homogene Markov-Kette $(X_n)_{n\geq 0}$ heißen

$$p_{uv}^{(m)} := \mathbb{P}(X_{n+m} = v \,|\, X_n = u)$$

die m-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten von u nach v.

Bemerkung 42. Die m-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten hängen nicht von n ab. Für $m = 1$ ist dies gerade die Definition, für $m \geq 2$ folgt dies induktiv aus der Chapman-Kolmogorov-Gleichung. Dies lautet im homogenen Fall gerade

$$p_{uv}^{(\ell+m)} = \sum_{s \in S} p_{us}^{(\ell)} p_{sv}^{(m)}.$$

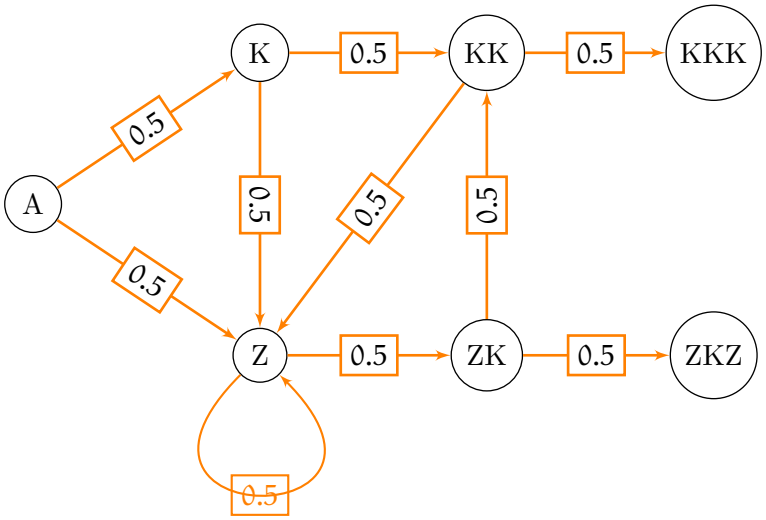
Bezeichnet P die Übergangsmatrix und $P^{(m)}$ die entsprechende Matrix der m-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten, so folgt mit Induktion, dass

$$P^{(m)} = P^m,$$

wobei rechts die m-te Potenz der Matrix P steht (im Sinne des Matrizenprodukts).

21 Absorptionswahrscheinlichkeiten

Es werde eine faire Münze solange geworfen, bis entweder dreimal Kopf oder „Zahl, Kopf, Zahl“ in Serie gefallen ist. Spieler A gewinnt im ersten Fall KKK, Spieler B im zweiten Fall ZKZ. Offenbar muss man sich, während das Spiel noch läuft, stets nur den letzten oder die beiden letzten Würfe merken, um zu entscheiden, wer das Spiel gewinnt. Es interessieren die Wahrscheinlichkeiten, dass Spieler A bzw. Spieler B gewinnt. Da für den Spielverlauf stets nur die letzten beiden Würfe (bzw. der letzte Wurf) relevant sind, kann man wie folgt modellieren:



Wir nehmen als Zustandsraum $S = \{A, K, Z, KK, ZK, KKK, ZKZ\}$ und Übergangswahrscheinlichkeit $1/2$ in Richtung der Pfeile und zudem Wahrscheinlichkeit 1 vom Zustand KKK und ZKZ jeweils zu sich selbst. Starten wir eine Markov-Kette $(X_n)_{n \geq 0}$ mit Zustandsraum S, diesen Übergangswahrscheinlichkeiten und $X_0 = A$ (d.h., Startverteilung $\pi_A = 1$ und $\pi_s = 0$ für $s \in S \setminus \{A\}$), so gewinnt offenbar Spieler A gerade, falls die Kette den Zustand KKK erreicht (und dort dann bleibt), Spieler B, falls die Kette im

Zustand ZKZ „terminiert“. Dieses Fragestellung führt auf die allgemeine Problematik der Trefferwahrscheinlichkeiten von Markov-Ketten.
Wir betrachten im Folgenden homogene Markov-Ketten $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Übergangsmatrix $(p_{uv})_{u,v\in S}$. Die Kette kann in verschiedenen Zuständen gestartet werden, d.h. wir betrachten verschiedene Startverteilungen π für eine Kette mit derselben Übergangsmatrix $(p_{uv})_{u,v\in S}$. Man schreibt dann $\mathbb{P}_x(\,\cdot\,)$ und $\mathbb{E}_x[\,\cdot\,]$ falls die Kette im Zustand $x \in S$ gestartet wird und allgemeiner $\mathbb{P}_\pi(\,\cdot\,)$ und $\mathbb{E}_\pi[\,\cdot\,]$, falls die Kette mit Startverteilung π gestartet wird.

Definition 21.1. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine homogene Markov-Kette mit Übergangsmatrix $(p_{uv})_{u,v\in S}$. Sei $\emptyset \neq B \subset S$ eine Teilmenge des Zustandsraumes S. Dann heißt

$$M := \min\{n \geq 0 : X_n \in B\}$$

der *Zeitpunkt des ersten Eintritts* in B. Die Wahrscheinlichkeiten

$$w(x) = \mathbb{P}_x\left(M < \infty, X_M = z\right),$$

von Startpunkt x aus bei Eintritt in B den Zustand $z \in B$ zu erreichen, heißen *Trefferwahrscheinlichkeiten.*

Beispiel 21.2. Im vorigen Beispiel lassen sich die Wahrscheinlichkeiten, dass Spieler A bzw. Spieler B gewinnt, wie folgt in diesem Rahmen einordnen: Wir starten die Markov-Kette im Zustand $x = A$, wählen $B = \{KKK, ZKZ\}$ und betrachten dann $z = KKK$ bzw. $z = ZKZ$. Die Trefferwahrscheinlichkeiten sind dann gerade die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.

Lemma 21.3. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine homogene Markov-Kette mit Übergangsmatrix $(p_{uv})_{u,v\in S}$. Seien $\emptyset \neq B \subset S$ und $z \in B$. Dann gilt für die Trefferwahrscheinlichkeiten

$$w(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = z \\ 0, & \text{falls } x \in B \setminus \{z\} \\ \sum_{y\in S} p_{xy} w(y), & \text{falls } x \in S \setminus B. \end{cases} \tag{43}$$

Beweis.
Für $x \in B$ ist die Behauptung klar. Für $x \notin B$ führen wir eine „Zerlegung nach dem ersten Schritt“ durch: Es gilt

$$w(x) = \mathbb{P}_x\left(M < \infty, X_M = z\right) = \sum_{y\in S} \mathbb{P}_x(X_1 = y)\mathbb{P}_x\left(M < \infty, X_M = z | X_1 = y\right) \tag{44}$$

nach dem Satz von der totalen W-keit, und es ist $\mathbb{P}_x(X_1 = y) = p_{xy}$. Wir unterscheiden nun die Fälle $y \in B$ und $y \in S \setminus B$. Im Falle $y \in B$ ist wegen $x \in S \setminus B$

$$\mathbb{P}_x(M < \infty, X_M = z \,|\, X_1 = y) = \mathbb{1}_{\{z\}}(y) = w(y) \quad \text{für alle } y \in B.$$

Sei nun $y \in S \setminus B$. Wegen $x, y \in S \setminus B$ gilt dann $M \geq 2$. Den zweiten Faktor in (44) schreiben wir mit der σ-Additivität, angewandt auf $\{M < \infty\} = \bigcup_{\ell \geq 0} \{M = \ell\}$, um:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(M < \infty, X_M = z | X_1 = y) &= \sum_{\ell=2}^{\infty} \mathbb{P}_x(M = \ell, X_M = z | X_1 = y) \\
&= \sum_{\ell=2}^{\infty} \mathbb{P}_x\left(X_0, X_1, \ldots, X_{\ell-1} \notin B, X_\ell = z | X_1 = y\right) \\
&\overset{\text{ME}}{=} \sum_{\ell=2}^{\infty} \mathbb{P}_y\left(X_0, \ldots, X_{\ell-2} \notin B, X_{\ell-1} = z\right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}_y\left(X_0, \ldots, X_{\ell-1} \notin B, X_\ell = z\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{P}_y\left(M = \ell, X_M = z\right) \qquad (45) \\
&= \mathbb{P}_y\left(M < \infty, X_M = z\right) = w(y),
\end{aligned}$$

wobei in (45) verwendet wurde, dass unter $X_0 = y \notin B$ dann $M \geq 1$ gilt. Zusammen folgt also $w(x) = \sum_{y \in S} p_{xy} w(y)$. ∎

Bemerkung 43. Gezeigt ist mit Lemma 21.3, dass die Trefferwahrscheinlichkeiten $w(x)$, die Bedingungen (43) erfüllen. Sie werden durch (43) i.A. allerdings nicht eindeutig bestimmt. Die Trefferwahrscheinlichkeiten sind charakterisiert dadurch, dass sie minimal unter allen nichtnegativen Lösungen von (43) sind.

Satz 21.4. Sei $f : S \to \mathbb{R}_0^+$ eine nichtnegative Funktion mit $f(z) = 1$, $f(x) = 0$ für $x \in B \setminus \{z\}$ und

$$\sum_{y \in S} p_{xy} f(y) \leq f(x)$$

für alle $x \notin B$. Dann gilt $w(x) \leq f(x)$ für alle $x \in S$.

Beweis.
Für $x \in B$ ist die Behauptung klar. Für $x \notin B$ zeigen wir zunächst $\mathbb{P}_x(X_M = z, M \leq \ell) \leq f(x)$ durch Induktion nach ℓ. Der Induktionsanfang $\ell = 0$ ist wahr, da $\mathbb{P}_x(X_M = z, M \leq 0) = 0$ gilt für $x \notin B$. Für den Induktionsschrit $\ell \to \ell + 1$ führen wir wieder eine Zerlegung nach dem ersten Schritt durch: Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x\left(X_M = z, M \leq \ell + 1\right) &= \sum_{y \in S} \mathbb{P}_x(X_1 = y) \mathbb{P}_x\left(X_M = z, M \leq \ell + 1 | X_1 = y\right) \\
&= \sum_{y \in S} p_{xy} \mathbb{P}_y\left(X_M = z, M \leq \ell\right) \\
&\overset{\text{IV}}{\leq} \sum_{y \in S} p_{xy} f(y) \leq f(x).
\end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit von unten folgt

$$\mathbb{P}_x(X_M = z, M \le \ell) \uparrow \mathbb{P}_x(X_M = z, M < \infty) = w(x),$$

also $w(x) \le f(x)$. ∎

Bemerkung 44. Die eingangs gestellte Frage kann nun gelöst werden. Es ist leicht zu finden, dass

$$\mathbb{P}(\text{Spieler A gewinnt}) = \frac{5}{12}, \quad \mathbb{P}(\text{Spieler B gewinnt}) = \frac{7}{12}.$$

Beispiel 21.5 (Gambler's ruin)**.** Eine Spielerin habe Kapital $K \in \mathbb{N}$ mit $1 \le K < a$ und $a \in \mathbb{N}$. Sie spiele ein Spiel in Runden. In jeder Runde gewinnt die Spielerin mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ den Einsatz 1, mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ verliert sie den Einsatz. Sie hört auf, falls sie ihr Kapital verspielt hat oder Kapital a erreicht hat. Gesucht ist die Ruinwahrscheinlichkeit.
Wir modellieren dies mit einer Markov-Kette: Der Zustandsraum ist $S = \{0, 1, \dots, a\}$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind für $x \in \{1, \dots, a-1\}$

$$p_{xy} = \begin{cases} p, & \text{falls } y = x+1, \\ q, & \text{falls } y = x-1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ferner wird $p_{00} = p_{aa} = 1$ gesetzt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich als Trefferwahrscheinlichkeit wie folgt: Wir wählen $B = \{0, a\}$, $z = 0$. Dann ist die Trefferwahrscheinlichkeit $w(K)$ die gesuchte Ruinwahrscheinlichkeit. Nach Lemma 21.3 gilt für $1 \le x \le a-1$

$$w(x) = p \cdot w(x+1) + q \cdot w(x-1) \tag{46}$$

sowie $w(0) = 1$, $w(a) = 0$. Das Gleichungssystem (46) lässt sich lösen:

$$w(x) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1} \text{ für } p \ne \frac{1}{2}, \quad w(x) = \frac{a-x}{a} \text{ für } p = \frac{1}{2}.$$

22 Rekurrenz und Transienz

Die Zustände einer Markov-Kette unterscheidet man danach, ob sie im Verlauf der Zeit immer wieder besucht werden, oder, ob es einen letzten Zeitpunkt gibt, nach dem die Kette nicht mehr zum Zustand zurückkehrt. Im Folgenden sei stets $(X_n)_{n \ge 0}$ eine homogene Markov-Kette mit Zustandsraum S. Bei Start in $x \in S$ bezeichne

$$T_x := \min\{n \ge 1 \mid X_n = x\}$$

den *Zeitpunkt der ersten Rückkehr* nach x. Wie üblich wird $\min \emptyset := \infty$ vereinbart.

Definition 22.1. Ein Zustand $x \in S$ heißt *rekurrent*, falls $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) = 1$. Ein Zustand $x \in S$ heißt *transient*, falls $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) < 1$. Eine Markov-Kette heißt rekurrent (bzw. transient), falls alle ihre Zustände rekurrent (bzw. transient) sind.

Satz 22.2. Für einen transienten Zustand $x \in S$ gilt bei beliebiger Startverteilung π, dass

$$\mathbb{P}_\pi(X_n = x \text{ für unendlich viele } n) = 0.$$

Für einen rekurrenten Zustand $x \in S$ gilt

$$\mathbb{P}_x(X_n = x \text{ für unendlich viele } n) = 1.$$

Beweis.
Sei $C_x = |\{n \geq 1 : X_n = x\}|$ die Anzahl der Besuche in x. Mit der Markov-Eigenschaft gilt für $m \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\pi(C_x \geq m) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}_\pi(X_1, \ldots, X_{\ell-1} \neq x, X_\ell = x, X_n = x \text{ noch} \geq m-1 \text{ mal für } n > \ell) \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}_\pi(X_1, \ldots, X_{\ell-1} \neq x, X_\ell = x) \\
&\qquad \times \mathbb{P}_\pi(X_n = x \text{ noch} \geq m-1 \text{ mal für } n > \ell \,|\, X_1, \ldots, X_{\ell-1} \neq x, X_\ell = x) \\
&\overset{\text{ME}}{=} \mathbb{P}_\pi(C_x \geq 1)\, \mathbb{P}_x(C_x \geq m-1).
\end{aligned}$$

Iteration des Arguments liefert

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\pi(C_x \geq m) &= \mathbb{P}_\pi(C_x \geq 1) \cdot (\mathbb{P}_x(C_x \geq 1))^{m-1} \\
&= \mathbb{P}_\pi(T_x < \infty) \cdot (\mathbb{P}_x(T_x < \infty))^{m-1}. \qquad (47)
\end{aligned}$$

Für $m \to \infty$ gilt $\{C_x \geq m\} \downarrow \{C_x = \infty\}$. Falls nun x transient ist, also $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) < 1$, folgt aus der Stetigkeit von oben mit $m \to \infty$, dass $\mathbb{P}_\pi(C_x = \infty) = 0$.
Falls andererseits x rekurrent ist, so folgt aus (47) mit $\pi = \delta_x$, dem Dirac-Maß in x, (d.h. es werde in x gestartet), dass

$$\mathbb{P}_x(C_x \geq m) = \mathbb{P}_x(T_x < \infty)^m = 1, \quad m \geq 1.$$

Wieder mit der Stetigkeit von oben folgt dann

$$\mathbb{P}_x(X_n = x \text{ für unendlich viele } n) = \mathbb{P}_x(C_x = \infty) = 1.$$

Dies ist die Behauptung. ∎

Satz 22.3. Ein Zustand $x \in S$ ist transient genau dann, wenn

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_x(X_n = x) < \infty.$$

Beweis.
„⇐“: Es ist $\{X_n = x \text{ für unendlich viele } n\} = \limsup_{n\to\infty}\{X_n = x\}$. Die Endlichkeit der Reihe liefert mit dem Lemma von Borel-Cantelli 11.9 a), dass

$$\mathbb{P}_x(X_n = x \text{ für unendlich viele } n) = 0.$$

Nach Satz 22.2 ist x nicht rekurrent. Nach Definition 22.1 ist x somit transient.
„⇒“: Zunächst muss beachtet werden, dass Satz 11.9 b) nicht auf $\{X_n = x\}$ angewandt werden kann, da diese Ereignisse im Allgemeinen nicht unabhängig sind. Nach dem Beweis von Satz 22.2 gilt

$$\mathbb{P}_x(C_x = m) = \mathbb{P}_x(C_x \geq m) - \mathbb{P}_x(C_x \geq m+1) = q^m - q^{m+1} = q^m(1-q)$$

mit $q := \mathbb{P}_x(T_x < \infty) < 1$, da x transient ist. Bei Start in x ist C_x also geometrisch verteilt zum Parameter $1-q > 0$. Andererseits ist $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}} = C_x$. Damit folgt nun

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n = x) = \mathbb{E}_x[C_x] = \frac{1}{1-q} < \infty.$$

∎

Dies ist die Behauptung.

Als Anwendung betrachten wir die einfache symmetrische Irrfahrt aus Abschnitt 20.

Satz 22.4. Die einfache symmetrische Irrfahrt ist rekurrent für Dimensionen $d = 1, 2$ und transient für $d \geq 3$.

Beweis.
Wir bestimmen die W-keiten $\mathbb{P}_x(X_n = x)$. Offenbar kann man nur in einer geraden Anzahl von Schritten vom Zustand $x \in \mathbb{Z}^d$ zurück nach x kommen. Geht man n_i Schritte in positive Richtung der i-ten Koordinate, so muss man auch n_i Schritte in die entgegengesetzte Richtung gehen. Damit folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(X_{2n} = x) &= \sum_{n_1+\cdots+n_d=n} \binom{2n}{n_1, n_1, n_2, n_2, \ldots, n_d, n_d} (2d)^{-2n} \\ &= \binom{2n}{n} \sum_{n_1+\cdots+n_d=n} \binom{n}{n_1, \ldots, n_d}^2 (2d)^{-2n}. \end{aligned} \tag{48}$$

Für $d = 1$ liefert dies mit der Stirlingschen Formel asymptotisch für $n \to \infty$

$$\mathbb{P}_x(X_{2n} = x) = \binom{2n}{n} 2^{-2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Da die Reihe $\sum_{n\geq 1} 1/\sqrt{n}$ divergiert, folgt aus Satz 22.3 die Rekurrenz der Irrfahrt.
Für $d = 2$ folgt aus (48)

$$\mathbb{P}_x(X_{2n} = x) = \binom{2n}{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j} 4^{-2n} \overset{(*)}{=} \binom{2n}{n}^2 4^{-2n} \sim \frac{1}{\pi n}.$$

Die zugehörige Reihe in Satz 22.3 ist wieder divergent, die Irrfahrt also rekurrent. Für die in $(*)$ verwendete Identität $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = \binom{2n}{n}$ siehe (5), man kann dafür auch über die hypergeometrische Verteilung argumentieren.
Für $d \geq 3$ betrachten wir zunächst die Multinomialkoeffizienten $\binom{n}{n_1,\ldots,n_d}$. Es ist leicht zu sehen, dass für $m := \lceil n/d \rceil$ gilt

$$\binom{n}{n_1,\ldots,n_d} \leq \binom{dm}{m,\ldots,m}.$$

Damit folgt aus (48)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(X_{2n} = x) \leq & \binom{2n}{n} 2^{-2n} \binom{dm}{m,\ldots,m} d^{-n} \underbrace{\sum_{n_1+\cdots+n_d=n} \binom{n}{n_1,\ldots,n_d} d^{-n}}_{=1} \\ = & \binom{2n}{n} 2^{-2n} \binom{dm}{m,\ldots,m} d^{-n} \sim \left(\frac{2dm}{n}\right)^{1/2} (2\pi m)^{-d/2}\, d^{dm-n}.\end{aligned}$$

Wegen $dm \leq n + d$ liefert dies $\mathbb{P}_x(X_{2n} = x) = O(n^{-d/2})$ für $n \to \infty$. Damit konvergiert die Reihe in Satz 22.3 für jedes $d \geq 3$. Die Irrfahrt ist also transient für alle $d \geq 3$. ∎

23 Stationäre Verteilungen von Markov-Ketten

In diesem Abschnitt betrachten wir homogene Markov-Ketten $(X_n)_{n\geq 0}$ mit endlichem Zustandsraum S und Übergangsmatrix $P = (p_{uv})_{u,v\in S}$. Wir studieren die Verteilung $\mathbb{P}_{X_n}$ für große n.

Definition 23.1. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine homogene Markov-Kette mit Übergangsmatrix $P = (p_{uv})_{u,v\in S}$. Eine Verteilung π auf S heißt *stationäre Verteilung* (oder auch *Gleichgewichtsverteilung*) für $(X_n)_{n\geq 0}$, falls gilt

$$\pi_x = \sum_{y\in S} \pi_y p_{yx} \quad \text{für alle } x \in S.$$

Bemerkung 45. Wählt man als Startverteilung eine Gleichgewichtsverteilung π, so gilt $\mathbb{P}_{X_n} = \pi$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis.
Für $x \in S$ folgt mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}_\pi(X_1 = x) = \sum_{y\in S} \mathbb{P}_\pi(X_1 = x \,|\, X_0 = y)\mathbb{P}_\pi(X_0 = y) = \sum_{y\in S} p_{yx}\pi_y = \pi_x,$$

also $\mathbb{P}_{X_1} = \pi$. Mit Induktion nach n folgt die Behauptung. ∎

Eine Gleichgewichtsverteilung braucht i.A. nicht zu existieren. Wir schränken uns deshalb später auf eine wichtige spezielle Klasse von Markov-Ketten ein.

Definition 23.2. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine homogene Markov-Kette.

a) Wir schreiben $x \rightsquigarrow y$, falls ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $\mathbb{P}_x(X_m = y) > 0$. Der Zustand x *kommuniziert* mit y (Bez. $x \leftrightsquigarrow y$), falls $x \rightsquigarrow y$ und $y \rightsquigarrow x$.

b) $(X_n)_{n\geq 0}$ heißt *irreduzibel*, falls $x \leftrightsquigarrow y$ für alle $x, y \in S$, andernfalls reduzibel.

c) Für $x \in S$ heißt $d(x) = \mathrm{ggT}\{n \geq 1 : \mathbb{P}_x(X_n = x) > 0\}$ *Periode* von x.

d) $(X_n)_{n\geq 0}$ heißt *aperiodisch*, falls $d(x) = 1$ für alle $x \in S$.

e) $(X_n)_{n\geq 0}$ heißt *ergodisch*, falls $(X_n)_{n\geq 0}$ irreduzibel und aperiodisch ist.

Satz 23.3. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine ergodische Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum S. Dann existiert ein $M \in \mathbb{N}$, sodass für alle $x, y \in S$ und $n \geq M$ gilt:

$$\mathbb{P}_x(X_n = y) > 0.$$

Der Beweis benutzt das folgende zahlentheoretische Lemma.

Lemma 23.4. Sei $A = \{a_1, a_2, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a_1, a_2, \ldots) = 1$ und abgeschlossen bez. Addition, d.h. für $a, a' \in A$ gilt $a + a' \in A$. Dann existiert ein $N < \infty$ mit $n \in A$ für alle $n \geq N$. (ohne Beweis)

Beweis von Satz 23.3.
Zu $x \in S$ sei $A_x = \{n \geq 1 \,|\, \mathbb{P}_x(X_n = x) > 0\}$. Die Menge A_x erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 23.4: $\mathrm{ggT}(A_x) = 1$, da $(X_n)_{n\geq 0}$ aperiodisch ist, und für $a, a' \in A_x$ gilt mit der Chapman-Kolmogorov Gleichung

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(X_{a+a'} = x) &= \sum_{s\in S} \mathbb{P}(X_a = s|X_0 = x)\mathbb{P}(X_{a+a'} = x|X_a = s)\\ &\geq \mathbb{P}(X_a = x|X_0 = x)\mathbb{P}(X_{a+a'} = x|X_a = x)\\ &= \mathbb{P}_x(X_a = x)\mathbb{P}_x(X_{a'} = x) > 0,\end{aligned}$$

also $a + a' \in A_x$. Nach Lemma 23.4 existiert ein $N_x \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{P}_x(X_n = x) > 0$ für alle $n \geq N_x$. Seien nun $x, y \in S$ beliebig. Wegen der Irreduzibilität existiert ein $m_{xy} \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{P}_x(X_{m_{xy}} = y) > 0$. Für $m \geq M := \max\{N_x + m_{xy} \,|\, x, y \in S\}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(X_m = y) &= \sum_{s\in S} \mathbb{P}(X_{m-m_{xy}} = s \,|\, X_0 = x)\mathbb{P}(X_m = y \,|\, X_{m-m_{xy}} = s)\\ &\geq \underbrace{\mathbb{P}\left(X_{m-m_{xy}} = x \,|\, X_0 = x\right)}_{>0,\text{ da } m-m_{xy}\geq N_x} \cdot \underbrace{\mathbb{P}\left(X_m = y \,|\, X_{m-m_{xy}} = x\right)}_{=\mathbb{P}_x(X_{m_{xy}}=y)>0} > 0.\end{aligned}$$

Es ist $M < \infty$, da S endlich ist. ∎

Satz 23.5. Jede ergodische Markov-Kette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit endlichem Zustandsraum hat eine stationäre Verteilung.

Beweis.
Kann elementar geführt werden, wird hier aber ausgelassen. ∎

Satz 23.6 (Ergodensatz für Markov-Ketten)**.** Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine ergodische Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum S und Startverteilung μ. Sei π eine stationäre Verteilung für $(X_n)_{n\geq 0}$. Für $n \to \infty$ gilt dann

$$d_{TV}(\mathbb{P}_{X_n}, \pi) \to 0.$$

Beweis.
Wir wählen X_0 mit $\mathbb{P}_{X_0} = \mu$ und konstruieren die Markov-Kette $X_1, X_2, \ldots$ explizit: Sei $(U_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger, auf $[0,1]$ gleichverteilter ZVe. Dann kann $X_n = f(X_{n-1}, U_n)$ gewählt werden mit einer deterministischen Funktion f (Übung). Zudem konstruieren wir eine Markov-Kette $(X'_n)_{n\geq 0}$ mit Startverteilung $\mathbb{P}_{X'_0} = \pi$ und $X'_n = f(X'_{n-1}, U'_n)$ mit einer zweiten Folge $(U'_n)_{n\geq 1}$ unabhängiger, auf $[0,1]$ gleichverteilter ZVe ebenfalls unabhängig von $(U_n)_{n\geq 1}$. Zudem sei X'_0 unabhängig von X_0. Nach Bemerkung 45 gilt nun $\mathbb{P}_{X'_n} = \pi$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir betrachten den Zeitpunkt, zu dem sich die Ketten erstmals treffen:

$$T = \min\{n \geq 0 \,|\, X_n = X'_n\}.$$

Nach Satz 23.3 existiert ein $M \in \mathbb{N}$, sodass für alle $x, y \in S$ gilt $\mathbb{P}_x(X_M = y) > 0$. Zu festem $y \in S$ sei

$$\alpha := \min_{x\in S} \mathbb{P}_x(X_M = y) > 0.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T \leq M) &\geq \mathbb{P}(X_M = X'_M) \geq \mathbb{P}(X_M = y, X'_M = y) = \mathbb{P}(X_M = y) \cdot \mathbb{P}(X'_M = y) \\
&= \left(\sum_{x\in S} \mathbb{P}(X_M = y, X_0 = x)\right) \cdot \left(\sum_{x\in S} \mathbb{P}(X'_M = y, X'_0 = x)\right) \\
&= \left(\sum_{x\in S} \mathbb{P}(X_0 = x)\mathbb{P}_x(X_M = y)\right) \cdot \left(\sum_{x\in S} \mathbb{P}(X'_0 = x)\mathbb{P}_x(X'_M = y)\right) \\
&\geq \left(\sum_{x\in S} \mathbb{P}(X_0 = x) \cdot \alpha\right) \left(\sum_{x\in S} \mathbb{P}(X'_0 = x) \cdot \alpha\right) = \alpha^2.
\end{aligned}$$

Es folgt also $\mathbb{P}(T > M) \leq 1 - \alpha^2$. Mit demselben Argument folgt nun

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T > 2M) &= \mathbb{P}(T > M)\mathbb{P}(T > 2M \,|\, T > M) \leq (1-\alpha^2)\mathbb{P}(X_{2M} \neq X'_{2M} \,|\, T > M) \\
&\leq (1-\alpha^2)^2.
\end{aligned}$$

Mit Induktion folgt

$$\mathbb{P}(T > \ell M) \leq (1-\alpha^2)^\ell \overset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{also} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T > n) = 0. \tag{49}$$

Wir definieren nun eine dritte Markov-Kette durch $X''_0 = X_0$ und

$$X''_{n+1} := \begin{cases} f(X''_n, U_{n+1}), & \text{falls } X''_n \neq X'_n, \\ f(X''_n, U'_{n+1}), & \text{falls } X''_n = X'_n. \end{cases}$$

Die Folge $(X''_n)_{n\geq 0}$ ist also identisch mit $(X_n)_{n\geq 0}$ bis sich X_n und X'_n treffen. Danach ist $(X''_n)_{n\geq 0}$ identisch mit $(X'_n)_{n\geq 0}$. Nach Konstruktion ist $(X''_n)_{n\geq 0}$ ebenfalls eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix wie $(X_n)_{n\geq 0}$ und $(X'_n)_{n\geq 0}$ und Startverteilung $\mathbb{P}_{X''_0} = \mathbb{P}_{X_0} = \mu$. (Begründung: Die Übergänge für X''_n werden mit einer Folge unabhängiger, uniform auf $[0,1]$ verteilter ZVen, die as (U_n) und (U'_n) ausgewählt werden, mittels der Funktion f konstruiert.) Insgesamt haben wir nun

- $\mathbb{P}_{X''_n} = \mathbb{P}_{X_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$,
- $\mathbb{P}_{X'_n} = \pi$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$,
- $\{X''_n \neq X'_n\} \subset \{T > n\}$.

Lemma 13.2 liefert nun mit (49)

$$d_{TV}(\mathbb{P}_{X_n}, \pi) = d_{TV}(\mathbb{P}_{X''_n}, \mathbb{P}_{X'_n}) \leq 2\mathbb{P}(X''_n \neq X'_n) \leq 2\mathbb{P}(T > n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dies ist die Behauptung. ∎

BSc: Bemerkung für Bachelor-Studierende: Die Idee des vorigen Beweises, die von Wolfgang Döblin stammt, besteht darin, X''_n mit Verteilung von X_n zu konstruieren und gleichzeitig an X'_n zu koppeln, d.h. Gleichheit mit hoher Wahrscheinlichkeit zu erreichen. Man spricht bei derartigen Argumenten von „Coupling“. Verschiedene Arten zu koppeln spielen eine große Rolle in der Kontruktion und Analyse von Markov-Ketten und Algorithmen. Dies, zahlreiche Anwendungen und weiterführende interessante Themen finden sich in dem elementar gehaltenen Buch [5].

L3: Bemerkung für L3-Studierende: Im Kontext von Satz 23.3 werden Elemente der Linearen Algebra (Matrizenkalkül, Eigenvektoren), der Analysis (Metriken, Konvergenz von Zahlenfolgen) sowie der Stochastik verknüpft. Weiter kann die Thematik sehr schön mit Anwendungen motiviert und verknüpft werden. Satz 23.3 spielt z.B. eine grundlegende und weitreichende Rolle bei der Simulation von Verteilungen.
Eine andere interessante Anwendung ist etwa der PageRank Algorithmus der Internet-Suchmaschine Google, um Internetseiten zu gewichten. Dabei werden die Internetseiten als Knoten eines Graphen modelliert, die Hyperlinks auf andere Seiten als gerichtete Kanten zwischen Knoten. Die Gewichte, die der PageRank Algorithmus den Internetseiten zuweist, sind im Wesentlichen die Wahrscheinlichkeiten der stationären Verteilung einer einfachen symmetrischen Irrfahrt auf diesem Graphen. Die Menge der Knoten bildet also den Zustandsraum, für jeden Übergang folge man jeder der ausgehenden Kanten mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Um allerdings zu erreichen, dass

eine ergodische Markov-Kette entsteht, wird zudem mit einem „Dämpfungsfaktor“ gearbeitet: In jedem Schritt wird nur mit Wahrscheinlichkeit $\mathtt{d} \in (\mathtt{0}, \mathtt{1})$ ein Übergang gemäß der einfachen symmetrischen Irrfahrt realisiert. Andernfalls springt die Kette zu einem zufälligen, uniform verteilten Knoten im Graphen. Überlegen Sie, dass dieses Vorgehen mit Dämpfungsfaktor stets zu einer homogenen, ergodischen Markov-Kette führt. Es stellen sich nun PageRank betreffend zahlreiche Fragen, die erlauben, Inhalte der Linearen Algebra, Analysis und Stochastik zu verbinden, siehe etwa [8].

Literatur

[1] A. D. Barbour, Lars Holst, and Svante Janson. *Poisson approximation*, volume 2 of *Oxford Studies in Probability*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1992. Oxford Science Publications.

[2] Andreas Büchter and Hans-Wolfgang Henn. *Elementare Stochastik*. Mathematik für das Lehramt. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2nd. edition, 2007. Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls.

[3] Hermann Dinges and Hermann Rost. *Prinzipien der Stochastik*. Teuber Studienbücher Mathematik. Vieweg+Teubner Verlag, 1982.

[4] Hans-Otto Georgii. *Stochastik*. de Gruyter Lehrbuch. Walter de Gruyter & Co., Berlin, expanded edition, 2009. Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.

[5] Olle Häggström. *Finite Markov chains and algorithmic applications*, volume 52 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[6] Norbert Henze. *Stochastik für Einsteiger*. Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, expanded edition, 2012. Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls.

[7] Norbert Henze, Kai Müller, and Judith Schilling. *Stochastik rezeptfrei unterrichten*. Springer Spektrum, 2021. Anregungen für spannende Lehre über den Zufall.

[8] Hans Humenberger. Das Google-PageRank-System. *mathematik lehren*, 154:58–63, 2009.

[9] Götz Kersting and Anton Wakolbinger. *Elementare Stochastik*. Mathematik Kompakt. Birkhäuser/Springer, Basel, second edition, 2010.

[10] Ulrich Krengel. *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, volume 59 of *Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1988.

[11] Michael Messer and Gaby Schneider. *Statistik*. Springer Spektrum, 2019. Theorie und Praxis im Dialog.