J.W. Goethe Universität
R. Neininger

WS 2017/18
Blatt 6

Übungen zu
Stochastische Analyse von Algorithmen

Aufgabe 25. Beweisen Sie Lemma 5.4 des Skripts.

Aufgabe 26. Der zufällige Binärsuchbaum werde sukzessive von einer Folge unabhängiger, identisch uniform auf $[0,1]$ verteilter Zufallsvariable aufgebaut. Sind n interne Knoten in den Baum eingefügt, so hat der Baum $n+1$ externe Knoten und einer dieser externen Knoten wird durch den $n+1$-ten internen Knoten ersetzt. Zeigen Sie, dass alle externen Knoten mit derselben Wahrscheinlichkeit $1/(n+1)$ vom $n+1$-ten internen Knoten ersetzt werden.

Dies bedeutet, dass Sie einen zufälligen Binärsuchbaum wie folgt generieren können: Man starte mit der Wurzel und ihren zwei externen Knoten. In jedem Schritt wird ein externer Knoten uniform gewählt und durch einen intenen Knoten ersetzt.

Aufgabe 27. Ein zufälliger Binärsuchbaum werde von einer gleichverteilten Permutation $(\Pi_1, \ldots, \Pi_n)$ von $\{1, \ldots, n\}$ aufgebaut. Es bezeichne N_i die Anzahl der Knoten im Teilbaum, dessen Wurzel das Element Π_i ist für $1 \leq i \leq n$. Die Wurzel selbst werde zu N_i nicht mitgezählt. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbb{E}\, N_i = \frac{2(n-i)}{i+1}.$$

Aufgabe 28. Wir betrachten das Modell zufälliger Binärsuchbäume mit n Knoten aus dem Beweis von Satz 5.9, bei dem die Wurzel Wert n erhält sowie die Kinder eines Knoten mit Wert V Werte $\lfloor V\overline{U} \rfloor$ und $\lfloor V(1-\overline{U}) \rfloor$ mit einer unabhängigen uniform auf $[0,1]$ verteilten Zufallsvariable $\overline{U}$. Der Baum besteht aus allen Knoten des vollständigen Binärbaums, die Werte ≥ 1 haben. Um eine untere Schranke für die Höhe des zufälligen Binärsuchbaumes zu erhalten, betrachten Sie den von der Wurzel startenden Pfad, der jeweils dem Ast, der zum Kind mit dem größeren der beiden Gewichte führt, folgt. Sei T_n die Tiefe des letzten Knotens dieses Pfads. Zeigen Sie, dass

$$\frac{T_n}{\log n} \xrightarrow{\mathbb{P}} -\frac{1}{\mu} = 3{,}2588\ldots \quad (n \to \infty),$$

mit der Konstanten μ aus Aufgabe 17.

Hinweis: Verwenden Sie das schwache Gesetz großer Zahlen.

Bemerkung: Aufgabe 28 zeigt, dass dieses Vorgehen keine Knoten liefert, die annähernd auf dem Niveau der Höhe des Baumes sitzen. Für die Höhe H_n des Baumes gilt nach Satz 5.9

$$\frac{H_n}{\log n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 4{,}3110\ldots \quad (n \to \infty).$$

Abgabe am Dienstag, den 23. Januar, vor der Vorlesung oder nach Absprache mit Frau Straub.