J.W. Goethe Universität
R. Neininger

WS 2017/18
Blatt 3

Übungen zu
Stochastische Analyse von Algorithmen

Aufgabe 9. Berechnen Sie für einen Galton–Watson Prozess $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit *offspring*-Verteilung gegeben durch $\mathbb{P}(Z_1 = i) = p_i = p^i(1-p)$ für $i \geq 0$ mit $0 < p < 1$ folgende Größen: Die erzeugende Funktion $f(s) = \mathbb{E}\left[s^{Z_1}\right]$, $\mathbb{P}(Z_n = 0)$ sowie die Aussterbewahrscheinlichkeit.

Aufgabe 10. Berechnen Sie für einen Galton–Watson Prozess $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit *offspring*-Verteilung gegeben durch $\mathbb{P}(Z_1 = i) = p_i$ mit $p_0 = 1-p$ und $p_2 = p$ mit $0 < p < 1$ die Aussterbewahrscheinlichkeit.

Aufgabe 11. Für einen subkritischen Galton–Watson Prozess $(Z_n)_{n\geq 0}$ bezeichne T seinen Familienbaum, $|T| := \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$ die Gesamtgröße der Population sowie g_Z und $g_{|T|}$ die erzeugenden Funktionen von Z_1 bzw. von $|T|$. Zeigen Sie, dass gilt

$$g_{|T|}(s) = s g_Z(g_{|T|}(s)), \quad \mathbb{E}\left[|T|\right] = \frac{1}{1 - \mathbb{E}\left[Z_1\right]}.$$

Berechnen Sie $g_{|T|}$ für den in der vorigen Aufgabe spezifizierten Galton-Watson Prozess.

Aufgabe 12. Seien T und $|T|$ wie in der vorigen Aufgabe für einen Galton–Watson Prozess mit binärer *offspring* Verteilung, d.h. mit *offspring* Verteilung $(1-p)\delta_0 + p\delta_2$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbb{P}(|T| < \infty) = \begin{cases} 1, & \text{falls } p \leq 1/2, \\ \frac{1-p}{p}, & \text{falls } p > 1/2. \end{cases}$$

Zeigen Sie ferner, dass

$$\mathbb{P}(|T| = k) = \frac{1}{p}\mathbb{P}(S_0 = S_{k+1} = 0, S_i > 0 \text{ für } 1 \leq i \leq k), \quad k \in \mathbb{N},$$

wobei $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine einfache Irrfahrt ist, d.h. $S_i = Y_1 + \cdots + Y_i$ mit unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen Y_i mit $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_1 = -1) = p$.

Abgabe am Dienstag, den 5. Dezember, vor der Vorlesung.

Saalübung: Zeigen Sie für einen subkritischen Galton-Watson Prozess $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit $m := \mathbb{E}\left[Z_1\right]$, dass gilt:

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \leq m^n.$$