Stochastische Analyse von Algorithmen, Fixpunktgleichungen und ideale Metriken*

Ralph Neininger
J. W. Goethe-Universität Frankfurt am Main

20. Oktober 2004

Zusammenfassung

Die vorliegende zusammenfassende Diskussion einiger meiner Arbeiten befasst sich mit der stochastischen Analyse rekursiver Algorithmen und Datenstrukturen und verwandter diskreter, rekursiver Strukturen mit der Kontraktionsmethode und ist Teil der schriftlichen Habilitationsleistung im Fach Mathematik an der J. W. Goethe-Universität Frankfurt am Main. Es wird ein allgemeiner Typ von Verteilungsrekursion zusammen mit zahlreichen, hauptsächlich aus der Informatik stammenden Beispielen besprochen. Die Kontraktionsmethode, ein Zugang, der aus gegebener Information über asymptotische Entwicklungen von Momenten allgemeine Grenzwertsätze liefert, wird dafür systematisch entwickelt. Diese Methode beruht auf der Verwendung von Wahrscheinlichkeitsmetriken und Fixpunkten maßwertiger Abbildungen, die die auftretenden Grenzverteilungen charakterisieren. Es werden Grenzwertsätze basierend auf der minimalen L_2 Metrik und der Zolotarev Metrik vorgestellt und sowohl ihr Anwendungspotential als auch ihre Beschränkungen anhand der Beispiele erläutert. Insbesondere wird auch der Fall degenerierter Fixpunktgleichungen behandelt, für den ein universeller zentraler Grenzwertsatz diskutiert wird.

*Dieses Forschungsprojekt wurde seit 2001 von der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Emmy Noether Programms unterstützt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Gebiet der Algorithmen und Datenstrukturen stellt eine Vielzahl grundlegender rekursiver, diskreter Strukturen und Algorithmen bereit, die in praktischen Anwendungen der Informatik allgegenwärtig sind. Verschiedene Baumstrukturen, die zur Organisation von Daten verwendet werden, sowie zahlreiche Algorithmen zur Lösung von Such-, Sortier-, und Auswahlproblemen, Graphenalgorithmen, Algorithmen auf Zeichenketten (DNA Sequenzen, Suchen im Internet) und Probleme der kombinatorischen Optimierung haben rekursive Struktur. Um die Komplexität von Algorithmen sowie entsprechender Operationen auf Bäumen zu messen, werden Elementaroperationen, etwa die Anzahl der Vergleiche zwischen Elementen der Eingabemenge, gezählt. Ebenso kann der benötigte Speicherplatz betrachtet werden. Auf der Grundlage quantitativer Informationen über Laufzeit und Speicherplatzbedarf können Algorithmen verglichen und effiziente Algorithmen erkannt werden.

Da die Kenngrößen Laufzeit und Speicherplatzbedarf typischerweise von der speziellen Eingabe abhängen, werden in der Informatik sowohl "worst case" Situationen betrachtet, also Eingaben, bei denen die entsprechenden Kenngrößen maximal werden, als auch "average case" Analysen, bei denen Mittelwerte der

Kenngrößen untersucht werden. Eine Verteilung auf der Eingabemenge kann dabei durch eine bestimmte Anwendung motiviert sein. Häufig kann man die Gleichverteilung auf den möglichen Eingaben zugrunde legen, was sich insbesondere dann rechtfertigen lässt, wenn Eingaben vorab randomisiert werden, also etwa zunächst in eine zufällige Reihenfolge gebracht werden. Die "Average Case Analysis of Algorithms" wurde von D. E. Knuth 1963 begründet und entwickelte sich seitdem zu einem mathematischen Gebiet, das stark von der Verwendung erzeugender Funktionen geprägt ist. Eine enzyklopädische Darstellung dieser Richtung der Analyse von Algorithmen stellt Knuths (1969a, 1969b, 1973) dreibändiges Werk "The Art of Computer Programming" dar, das in Morrison und Morrison (1999) unter die zwölf einflussreichsten naturwissenschaftlichen Monographien des 20. Jahrhunderts gewählt wurde.

Seit den 80er Jahren des vergangenen Jahrhunderts werden verstärkt auch die Verteilungen der Kenngrößen selbst untersucht, um genauere Informationen über das Verhalten der Algorithmen zu erhalten. Dazu wird — wie bei der "Average case Analysis of Algorithms" — ein stochastisches Modell für die Eingabe angenommen, in dem über Mittelwerte hinaus weitere Verteilungsgrößen untersucht werden. Dabei stehen vor allem Verteilungskonvergenz für die passend skalierten Kenngrößen (bei wachsender Größe der Eingabemenge) sowie Wahrscheinlichkeiten für große Abweichungen vom Erwartungswert im Vordergrund. "Large deviations" sind für die Informatik interessant, da man sich gegen schlechtes Verhalten der Algorithmen (d.h. große Werte der Kenngrößen) mit hoher Wahrscheinlichkeit abgesichert wissen will.

Bei der Untersuchung von Verteilungskonvergenz von Kenngrößen rekursiver Algorithmen und Datenstrukturen spielen derzeit verschiedene stochastische Methoden eine große Rolle:

- **Momenterzeugende Funktionen und Sattelpunktmethode**, vgl. etwa Flajolet und Odlyzko (1982, 1990), Pittel (1999), Drmota (1997), Szpankowski (2001) und die Referenzen dort.

- **Momenten- und Kumulantenmethode**, vgl. etwa Hwang (2003), Janson, Łuczak und Ruciński (2000, Kapitel 6) und die Referenzen dort.

- **Martingalmethoden**, vgl. etwa Régnier (1989), Chauvin und Rouault (2004) und die Referenzen dort.

- **Direkte Zugänge zu asymptotischer Normalität** (Darstellungen über Summen unabhängiger oder schwach abhängiger Zufallsvariablen, Steinsche Methode, Berry-Esseen Methodik), vgl. etwa Devroye (2002/03), Barbour, Holst und Janson (1992), Janson, Łuczak und Ruciński (2000, Kapitel 6) und die Referenzen dort.

- **Kontraktionsmethode**, vgl. Rösler (1991, 1992), Rachev und Rüschendorf (1995), Rösler und Rüschendorf (2001), Neininger und Rüschendorf (2004a, 2004b) und die Referenzen dort.

Die Kontraktionsmethode ist ein Zugang zur Untersuchung von Verteilungskonvergenz für Parameter rekursiver Strukturen, der auf der Verwendung von Wahrscheinlichkeitsmetriken und auf Fixpunkten maßwertiger Abbildungen beruht. Eingeführt durch Rösler (1991) wurde diese Technik danach unabhängig in Rösler (1992) und Rachev und Rüschendorf (1995) entwickelt und gehört seit einigen Jahren ebenso zum Arsenal der Methoden zur Behandlung rekursiver Größen. Ziel der Kontraktionsmethode ist es, typischerweise ausgehend von asymptotischen Entwicklungen der Momente (Erwartungswerte, eventuell auch Varianzen) von Parametern zufälliger, rekursiver Strukturen, einen Grenzwertsatz für die passend skalierten Parameter zu erhalten. Die Grenzverteilung wird dabei als Fixpunkt einer maßwertigen Abbildung charakterisiert.

Im klassischen Konzept der Grenzwertsätze der Stochastik, bei dem Folgen komplizierter Verteilungen durch ihre Grenzwerte approximiert werden, stellt die Kontraktionsmethode für rekursive Folgen einen Teilschritt dar. Häufig werden zunächst asymptotische Entwicklungen der Momente benötigt, die in komplizierteren Fällen etwa mit erzeugenden Funktionen berechnet werden müssen. Darauf aufbauend liefert die Kontraktionsmethode einen Grenzwertsatz, in dem die Grenzverteilung allerdings häufig nicht explizit gegeben ist und zur Approximation deshalb nicht direkt verwendet werden kann. In einem weiteren Schritt muss dann versucht werden, Eigenschaften des Grenzwerts aus der Fixpunkteigenschaft abzuleiten.

In dieser Arbeit wird ein Überblick über Aspekte der Kontraktionsmethode gegeben, die sich bei der Analyse zahlreicher Anwendungen der Informatik und verwandter Gebiete als zentral erwiesen haben. Dazu wird in Abschnitt 2 zunächst ein allgemeiner Typ von Rekursion für Verteilungen zusammen mit zwölf Anwendungen verschiedener Gebiete vorgestellt. Die Theorie der Kontraktionsmethode wird sodann für diese allgemeine Rekursion entwickelt und zusammen mit den Anwendungen diskutiert. Dazu wird in Abschnitt 3 zunächst die grundlegende Idee der Methode erläutert, deren Realisierung im Weiteren von der Wahl einer zu verwendenden Wahrscheinlichkeitsmetrik abhängt.

Bis zum Jahre 2001 wurden die meisten konkreten Anwendungen aus der Informatik in einer L_2 Theorie beruhend auf der minimalen L_2 Metrik behandelt. Der Stand dieser Theorie wird in Abschnitt 4 zusammen mit Anwendungen dargestellt, soweit diese sich in diesem Rahmen behandeln lassen.

In Abschnitt 5 werden dann einige Beschränkungen des L_2 Settings hauptsächlich in Bezug auf asymptotische Normalität zusammen mit weiteren prinzipiellen Schwierigkeiten der Kontraktionsmethode bei degenerierten Fixpunktgleichungen erläutert. Diesen Problemen und den damit zusammenhängenden Anwendungen sind die Abschnitte 6-8 gewidmet, in denen die Kontraktionsmethode, Neininger und Rüschendorf (2004a, 2004b) folgend, systematisch für ideale Metriken am Beispiel der Zolotarev Metrik entwickelt wird.

In Abschnitt 6 werden kurz ideale Metriken und insbesondere die Zolotarev Metrik vorgestellt. Abschnitt 7 enthält einen allgemeinen Grenzwertsatz für die Zolotarev Metrik, der in verschiedene anwendungsrelevante Richtungen spezialisiert wird. In diesem Abschnitt wird auch erläutert, inwieweit Informationen über asymptotische Entwicklungen der Momente im voraus benötigt werden, um die Kontraktionsmethode anzuwenden. Es werden verschiedene Kontraktionsbedingungen aus dem Blickwinkel der in der Informatik auftretenden Fixpunktgleichungen verglichen. Abschnitt 8 enthält einen universellen zentralen Grenzwertsatz für Größen, deren Varianzen langsam variierend bei Unendlich sind. Dies ist ein anwendungsrelevanter Fall, der auf degenerierte Fixpunktgleichungen führt.

In Abschnitt 9 werden abschließend einige ausgewählte verwandte Probleme angesprochen: Die Fragen korrekter Konvergenzraten und großer Abweichungen, die Charakterisierung der Lösungsmengen von Fixpunktgleichungen, Eigenschaften und Simulation von Fixpunkten sowie Rekursionen, die Maxima anstelle von Summen beinhalten.

In dieser Arbeit wird besonderer Wert auf die Diskussion von Beispielen gelegt, um sowohl den in der Informatik zahlreich auftretenden Anwendungen gerecht zu werden, als auch die vielfältigen, mathematisch reizvollen Phänomene und Probleme in diesem Gebiet zu demonstrieren.

2 Rekusive Folgen von Verteilungen

In diesem Abschnitt werden die rekursiven Folgen von Verteilungen, die im folgenden betrachtet werden, in einem allgemeinen Setting spezifiziert und einige Beispiele aus dem Gebiet der Algorithmen und Datenstrukturen angegeben, die sich als Spezialfälle in dieses Setting einordnen. Die Theorie wird für zufällige Vektoren in $\mathbb{R}^d$ entwickelt. Für die meisten Anwendungen reicht es jedoch aus, den eindimensionalen Fall zu betrachten.

2.1 Ein allgemeiner Typ von Rekursion

Wir betrachten Folgen zufälliger, d-dimensionaler Vektoren $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die die Rekursion

$$Y_n \stackrel{d}{=} \sum_{r=1}^{K} A_r(n) Y^{(r)}_{I_r^{(n)}} + b_n, \quad n \geq n_0, \tag{1}$$

erfüllen, wobei $(A_1(n), \dots, A_K(n), b_n, I^{(n)}), (Y_n^{(1)}), \dots, (Y_n^{(K)})$ unabhängig sind, $A_1(n), \dots, A_K(n)$ zufällige $d \times d$ Matrizen, b_n ein zufälliger d-dimensionaler Vektor und $I^{(n)}$ ein Vektor zufälliger natürlicher Zahlen $I_r^{(n)} \in \{0, \ldots, n\}$ sind und $(Y_n^{(1)}), \ldots, (Y_n^{(K)})$ identisch verteilt sind wie (Y_n). Das Symbol $\stackrel{d}{=}$ bedeutet, dass rechte und linke Seite von Gleichung (1) identisch verteilt sind. Es gilt $n_0 \geq 1$ und $Y_0, \ldots, Y_{n_0-1}$ sind gegebene initialisierende zufällige Vektoren. Die Zahl $K \geq 1$ ist hier deterministisch. Für zufälliges K, $K = K_n$ abhängig von n und $K_n \to \infty$ lassen sich die hier vorgestellten Resultate verallgemeinern.

2.2 Beispiele aus der Informatik

In diesem Abschnitt werden einige Beispiele aus den Anwendungen in der Informatik und verwandten Gebieten angegeben, die durch Gleichung (1) abgedeckt werden und auf die wir später zurückkommen werden. Wir geben nur die relevanten Rekursionsgleichungen an und geben Verweise, wo die Algorithmen und Strukturen beschrieben sind.

2.2.1 Quicksort

Die Anzahl der Schlüsselvergleiche des Sortieralgorithmus Quicksort (Hoare (1962)) angewandt auf eine gleichverteilte zufällige Permutation der Länge n (oder angewandt auf eine beliebige Permutation bei gleichverteilter Wahl des Pivotelements) erfüllt Rekursion (1) mit $d = 1$, $K = 2$, $A_1(n) = A_2(n) = 1$, $I_1^{(n)}$ gleichverteilt auf $\{0, \ldots, n-1\}$, $I_2^{(n)} = n - 1 - I_1^{(n)}$ und $b_n = n - 1$, vgl. Mahmoud (2000). An diesem Beispiel wurde die Kontraktionsmethode in Rösler (1991) eingeführt. Die Anzahl der Schlüsselaustausche des Sortieralgorithmus Quicksort angewandt auf eine gleichverteilte zufällige Permutation der Länge n erfüllt ebenfalls (1), wobei die Parameter d, K, $A_1(n)$. $A_2(n)$, $I^{(n)}$ wie bei den Schlüsselvergleichen sind, jedoch b_n nun abhängig von $I^{(n)}$ ist mit

$$\mathbb{P}(b_n = j \mid I_1^{(n)} = k) = \frac{\binom{k}{j}\binom{n-1-k}{j}}{\binom{n-1}{k}}, \quad 0 \leq j \leq k < n,$$

vgl. Sedgewick (1980, Seite 55) und Hwang und Neininger (2002, Abschnitt 6).

2.2.2 Bewertungen zufälliger Binärsuchbäume

Zur probabilistischen Untersuchung von Binärsuchbäumen wird in einem Standardmodell angenommen, dass der Binärsuchbaum von einer gleichverteilten zufälligen Permutation aufgebaut wird. In diesem Falle spricht man vom zufälligen Binärsuchbaum, vgl. Mahmoud (1992, Kapitel 2). Die interne Pfadlänge des zufälligen Binärsuchbaums mit n internen Knoten ist verteilungsgleich zur Anzahl der Schlüsselvergleiche von Quicksort und erfüllt deshalb die oben beschriebene Rekursion vom Typ (1). Es stellt sich heraus, dass eine Vielzahl von Parametern zufälliger Binärsuchbäume dieselbe Rekursion erfüllen, wobei nur der sogenannte Tollterm b_n von Parameter zu Parameter verschieden ist. In Devroye (2002/03) und Hwang und Neininger (2002) werden deshalb allgemeine Bewertungen zufälliger Binärsuchbäume mit n internen Knoten betrachtet, d.h. Rekursion (1) mit $d = 1$, $K = 2$, $A_1(n) = A_2(n) = 1$, $I_1^{(n)}$ gleichverteilt auf $\{0, \ldots, n-1\}$, $I_2^{(n)} = n - 1 - I_1^{(n)}$ und variablem Tollterm b_n, der von $I^{(n)}$ abhängig sein darf. Zahlreiche für Algorithmen relevante Parameter zufälliger Binärsuchbäume, die von diesem Typ von Rekursion abgedeckt werden, finden sich in Hwang und Neininger (2002, Abschnitt 6).

2.2.3 Tiefe von Knoten in zufälligen Binärsuchbäumen

Die Tiefe eines zufälligen (gleichverteilten) Knotens eines zufälligen Binärsuchbaums beschreibt die Komplexität für eine typische (erfolgreiche) Suche im Baum. Die Tiefe (im Baum mit n internen Knoten) erfüllt Rekursion (1) mit $d = 1$, $K = 1$, $A_1(n) = 1$, $b_n = 1$ und

$$\mathbb{P}(I_1^{(n)} = k) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } k = 0, \\ \frac{2k}{n^2} & \text{für } 1 \leq k \leq n-1, \end{cases}$$

vgl. Mahmoud (1992, Abschnitt 2.5) und Cramer und Rüschendorf (1996).

2.2.4 Wiener Index zufälliger Binärsuchbäume

Der Wiener Index eines zusammenhängenden Graphen ist die Summe der Abstände zwischen je zwei Knoten des Graphen, wobei der Abstand die Anzahl der Kanten auf der kürzesten Verbindung zwischen den Knoten ist. Der Wiener Index ist eine Größe, die ihren Ursprung in der mathematischen Chemie hat und auch in der Graphentheorie untersucht wird, vgl. Gutman und Polansky (1986), Trinajstić (1992) und Dobrynin, Entringer und Gutman (2001). Der Wiener Index eines zufälligen Binärsuchbaums lässt sich mit Rekursion (1) für (Y_n) in Dimension $d = 1$ nicht beschreiben, jedoch kann er wie folgt in Dimension $d = 2$ erhalten werden, vgl. Neininger (2002): Wir wählen $d = 2$, $K = 2$, $I_1^{(n)}$ gleichverteilt auf $\{0, \ldots, n-1\}$, $I_2^{(n)} = n - 1 - I_1^{(n)}$ sowie

$$A_1(n) = \begin{bmatrix} 1 & n - I_1^{(n)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2(n) = \begin{bmatrix} 1 & n - I_2^{(n)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_n = \begin{pmatrix} 2I_1^{(n)} I_2^{(n)} + n - 1 \\ n - 1 \end{pmatrix}.$$

Die erste Komponente von Y_n hat dann die Verteilung des Wiener Index, die zweite Komponente die Verteilung der internen Pfadlänge des zufälligen Binärsuchbaums mit n internen Knoten.

2.2.5 Größe zufälliger m-närer Suchbäume

Die Größe Y_n zufälliger m-närer Suchbäume, $m \geq 3$, (vgl. Mahmoud (1992, Kapitel 3)) mit n eingefügten Daten erfüllt Rekursion (1) mit $d = 1$, $K = m$, $A_1(n) = \cdots = A_m(n) = 1$ und $b_n = 1$. Bezeichne $V = (U_{(1)}, U_{(2)} - U_{(1)}, \ldots, 1 - U_{(m-1)})$ den Vektor der Zwischenräume zwischen unabhängigen, uniform auf $[0,1]$ verteilten Zufallsvariablen $U_1, \ldots, U_{m-1}$. Es bezeichnen also $U_{(1)}, \ldots, U_{(m-1)}$ die Ordnungsstatistiken dieser Vektoren. Dann ist für $u \in [0,1]^m$ mit $\sum_{r=1}^m u_r = 1$ die bedingte Verteilung von $I^{(n)}$ gegeben $V = u$ multinomial:

$$\mathbb{P}^{I^{(n)} \,|\, V=u} = M(n - (m-1), u),$$

wobei $M(n, u)$ die Multinomialverteilung mit Parametern n und u bezeichnet, vgl. Mahmoud und Pittel (1989), Lew und Mahmoud (1994) und Chern und Hwang (2001b).

2.2.6 Größe und Pfadlänge zufälliger Tries

Die Größe Y_n eines zufälligen Tries (vlg. Mahmoud (1992, Kapitel 5)) mit n eingefügten Daten erfüllt in einem Standardmodell $Y_0 = 0$ sowie die Rekursion (1) mit $d = 1$, $K = 2$, $A_1(n) = A_2(n) = 1$, und $I_1^{(n)}$ Binomial $B(n,p)$ verteilt und $I_2^{(n)} = n - I_1^{(n)}$. Im Falle $p = 1/2$ spricht man vom symmetrischen für $p \neq 1/2$ vom asymmetrischen Bernoulli Modell. Für die (externe) Pfadlänge zufälliger Tries muss im Vergleich zur Größe der Tries nur $b_n = 1$ zu $b_n = n$ geändert werden. Wie bei zufälligen Binärsuchbäumen in Abschnitt 2.2.2 können durch allgemeine Bewertungen auf zufälligen Tries (i.e. variables b_n) wieder weitere anwendungsrelevante Parameter abgedeckt werden, vgl. Schachinger (2001). Parameter der den Tries verwandten digitalen Suchbäumen und Patricia Tries erfüllen ähnliche Rekursionen, die auch durch (1) abgedeckt sind, vgl. Szpankowski (2001).

2.2.7 Mergesort

Die Anzahl der Schüsselvergleiche des Sortieralgorithmus Mergesort (in der "top-down" Variante) angewandt auf eine gleichverteilte zufällige Permutation der Länge n erfüllt Rekursion (1) mit $d = 1$, $K = 2$, $A_1(n) = A_2(n) = 1$, $I_1^{(n)} = \lceil n/2 \rceil$, $I_2^{(n)} = n - I_1^{(n)}$ und b_n eine Zufallsvariable, die in Knuth (1973, Abschnitt 5.2.4) beschrieben ist, vgl. Flajolet und Golin (1994), Hwang (1996, 1998), Cramer (1997) und Chen, Hwang und Chen (1999).

2.2.8 Randomisierte Spielbaum Auswertung

Die Komplexität von Algorithmen zur Auswertung von Spielbäumen wird in der Regel durch die Anzahl der vom Algorithmus gelesenen externen Knoten des Baumes gemessen, vgl. Motwani und Raghavan (1995, Kapitel 2). Für den randomisierten Algorithmus zur Auswertung von Spielbäumen von Snir (1985) lässt sich zeigen, dass es Eingaben gibt, für die die Komplexität in stochastischer Ordnung maximiert wird, vgl. Ali Khan und Neininger (2004). Diese worst case Komplexität kann durch Rekursion (1) beschrieben werden mit $d = 2$, $K = 4$,

$$A_1(n) = A_2(n) = \mathrm{Id}_2, \quad A_3(n) = \begin{bmatrix} B_1 B_2 & 0 \\ 1 - B_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4(n) = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ B_1 & 0 \end{bmatrix},$$

wobei Id_2 die 2×2 Einheitsmatrix bezeichnet und B_1, B_2 unabhängige Bernoulli $B(1/2)$ verteilte Zufallsvariablen sind, $b_n = 0$ sowie $I_r^{(n)} = n/4$ für $r = 1, \ldots, 4$. Die erste Koordinate von Y_n hat dann gerade die Verteilung dieser worst case Komplexität in einem binären Spielbaum entsprechender Höhe. Die Optimalität dieses randomisierten Algorithmus ist in Saks und Wigderson (1986) diskutiert, ein alternativer Zugang über 2-Typen Galton Watson Prozesse findet sich in Karp und Zhang (1995).

2.2.9 Maxima in rechtwinkligen Dreiecken

Wir betrachten die Anzahl der Maxima n unabhängiger, gleichverteilter Punkte im rechtwinkligen Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit Ecken $(0,0), (1,0), (0,1)$. Ein Punkt heißt maximal in einer Punktmenge des $\mathbb{R}^2$, falls es keinen anderen Punkt dieser Menge gibt, der größere x und y Koordinate hat. Die Anzahl der Maxima erfüllt Rekursion (1) mit $d = 1$, $K = 2$, $A_1(n) = A_2(n) = 1$, $b_n = 1$ und $I_1^{(n)}$, $I_2^{(n)}$ sind wie folgt gegeben als die ersten beiden Komponenten einer Mischung trinomialer Verteilungen: Bezeichne (U_n, V_n) den Punkt der gegebenen Punktmenge im Dreieck, der die Summe seiner beiden Koordinaten maximiert. Dann ist $I^{(n)} = (I_1^{(n)}, I_2^{(n)}, I_3^{(n)})$ bedingt auf $(U_n, V_n) = (u, v)$ trinomial verteilt:

$$\mathbb{P}^{I^{(n)} \,|\, (U_n, V_n) = (u,v)} = M\left(n - 1, \frac{u^2}{(u+v)^2}, \frac{v^2}{(u+v)^2}, \frac{2uv}{(u+v)^2}\right),$$

vgl. Bai et al. (2001, 2003). Der Fall des rechtwinkligen Dreiecks ist zentral, da allgemeinere konvexe Polygone “ohne rechte obere Ecke” auf den Fall des rechtwinkligen Dreiecks zurückgeführt werden können.

2.2.10 Größe kritischer Galton Watson Bäume

Yagloms (1947) exponentialer Grenzwertsatz für die Größe kritischer Galton Watson Prozesse bedingt auf Überleben der Population kann mit einer Variante von Rekursion (1) abgedeckt werden, bei der anstelle von K eine zufällige, von n abhängige Anzahl von Summanden K_n zugelassen wird, wobei $((A_r(n))_{r \geq 1}, b_n, I^{(n)}, K_n), (Y_n^{(1)}), (Y_n^{(2)}), \ldots$ unabhängig sind. Die Größe der Generation n (bedingt auf ihr Überleben) erfüllt diese Variante von Rekursion (1) mit $d = 1$, $A_1(n) = A_2(n) = \cdots = 1$ und $b_n = 0$. Ferner bezeichne T_n die Generation des jüngsten gemeinsamen Vorfahren der gesamten Generation n. Dann ist K_n die Anzahl derjenigen Kinder dieses Vorfahren, deren Nachkommen zur Generation n beitragen und $I_1^{(n)} = I_2^{(n)} = \cdots = n - T_n$. Dieser rekursive Zugang findet sich im Falle endlicher Varianz der Offspring Verteilung in Geiger (2000), der Fall von Offspring Verteilungen, die im Anziehungsbereich einer α-stabilen Verteilung liegen, $1 < \alpha \leq 2$, (ursprünglich von Slack (1968) behandelt), findet sich in Kauffmann (2003, Abschnitt 3.2).

2.2.11 Broadcast Communication Modelle

In Chen und Hwang (2003) werden verschiedene Kostenparameter für zwei Algorithmen zum Identifizieren von Maxima in Broadcast Communication Modellen mit n Prozessoren analysiert. Die Laufzeit von Algorithmus B dort erfüllt Rekursion (1) mit $d = 1$, $K = 1$, $A_1(n) = 1$, $I_1^{(n)}$ gleichverteilt auf $\{0, \ldots, n-1\}$ und b_n ist selbst die Laufzeit eines weiteren Algorithmus zur Lösung des "leader election" Problems, der in Prodinger (1993) und Fill, Mahmoud, and Szpankowski (1996) analysiert wurde und ebenfalls mit Rekursion (1) behandelt werden kann.

Die Anzahl der Schlüsselvergleiche des Algorithmus A in Chen und Hwang (2003) erfüllt Reursion (1) mit $d = 1$, $K = 2$, $A_1(n) = A_2(n) = 1$, $(I_1^{(n)}, I_2^{(n)})$ hat die Verteilung

$$\mathbb{P}\Big((I_1^{(n)}, I_2^{(n)}) = (j,k)\Big) = \begin{cases} 2^{-n}, & (j,k) = (0,0), \\ \binom{n-k-1}{j-1} 2^{-n}, & k \geq 0,\ 1 \leq j \leq n-k, \end{cases}$$

und wir haben $b_n = n - I_1^{(n)}$.

Weitere Parameter dieser beiden Algorithmen aus Chen und Hwang (2003) können ebenfalls mit Gleichung (1) formuliert werden.

2.2.12 Profil zufälliger Binärsuchbäume

Das Profil zufälliger Binärsuchbäume kann mit einer weiteren Variante von Rekursion (1), die wir hier explizit angeben, behandelt werden. Das Profil $Y_{n,k}$, $n \geq 0$, $0 \leq k \leq n$ eines zufälligen Binärsuchbäumes mit n Daten ist die Anzahl der externen Knoten, die Abstand k zur Wurzel des Baumes haben. Es gilt $Y_{n,0} = \delta_{n0}$ mit Kroneckers δ sowie

$$Y_{n,k} \stackrel{d}{=} Y^{(1)}_{I_1^{(n)},k-1} + Y^{(2)}_{I_2^{(n)},k-1}, \quad n \geq 1,\ 1 \leq k \leq n,$$

wobei $I_1^{(n)}$ gleichverteilt auf $\{0, \ldots, n-1\}$ ist, $I_2^{(n)} = n-1-I_1^{(n)}$ und Unabhängigkeitseigenschafen wie in (1) gelten, vgl. Chauvin, Drmota und Jabbour-Hattab (2001), Drmota und Hwang (2004) und Fuchs, Hwang und Neininger (2004).

2.2.13 Weitere Beispiele

Weitere wichtige Kenngrößen der Informatik und verwandter Gebiete, die Rekursion (1) erfüllen, sind Parameter der Auswahlalgorithmen Quickselect (auch Find genannt, vgl. Grübel und Rösler (1996), Kodaj und Móri (1997), Mahmoud et al. (1995), Hwang und Tsai (2001) und für weitere Referenzen den Übersichtsartikel Rösler (2004)), multiple Quickselect (Mahmoud und Smythe (1998)) und Bucket Selection sowie des Sortieralgorithmus Bucket Sorting (Mahmoud et al. (2000)), sekundäre Kostenparameter von Quicksort (Anzahl rekursiver Aufrufe, Stack Pushs und Pops, vgl. Neininger und Hwang (2002)), und Varianten von Quicksort (Chern et al. (2002)) sowie Parameter von Quicksort bei möglichen fehlerhaften Schlüsselvergleichen (vgl. Alonso et al. (2004)), Parameter zufälliger Skip Listen (vgl. Pugh (1989), Papadakis et al. (1990) und Devroye (1992)), Algorithmen zum Auflisten von Idealen zufälliger Halbordnungen (Janson (2002)), Abstände (und Größen minimaler spannender Bäume) in zufälligen Binärsuchbäumen (vgl. Mahmoud und Neininger (2003), Panholzer und Prodinger (2004) und Devroye und Neininger (2004)), Anzahlen eingebetteter Strukturen in zufälligen Binärsuchbäumen (vgl. Devroye (1991) und Flajolet et al. (1997)), die Länge eines zufälligen externen Zweigs eines Koaleszenzbaums (Durrett (2002, Seite 162)), sowie alle hier für zufällige Binärsuchbäume diskutierten Parameter in anderen Suchbäumen, insbesondere in zufälligen rekursiven Bäumen (vgl. Smythe und Mahmoud (1995)), Quadrantenbäumen (vgl. Flajolet et al. (1995)), m-nären Suchbäumen (vgl. Chern und Hwang (2001b)), Median von $(2t+1)$ Suchbäumen (vgl. Chern und Hwang (2001a)), Simplexbäumen (vgl. Devroye (1999)), Catalan Bäumen (vgl. Flajolet und Odlyzko (1982), Kolchin (1986, Kapitel 2) und Fill und Kapur (2004a)) und universellen Splitbaum Modellen (vgl. Devroye (1999)).

3 Der Zugang der Kontraktionsmethode

Wir normalisieren die Zufallsvektoren Y_n aus (1) zu

$$X_n := C_n^{-1/2}(Y_n - M_n), \quad n \geq 0, \tag{2}$$

wobei $M_n \in \mathbb{R}^d$ und C_n eine symmetrische, positiv-definite $d \times d$ Matrix ist. Falls die ersten beiden Momente von Y_n endlich sind, werden M_n und C_n typischerweise von der Ordnung des Erwartungswerts und der Kovarianzmatrix von Y_n gewählt. Für X_n folgt aus der Rekursionsgleichung (1) die modifizierte Rekursionsgleichung

$$X_n \stackrel{d}{=} \sum_{r=1}^{K} A_r^{(n)} X_{I_r^{(n)}}^{(r)} + b^{(n)}, \quad n \geq n_0, \tag{3}$$

mit

$$A_r^{(n)} := C_n^{-1/2} A_r(n) C_{I_r^{(n)}}^{1/2}, \quad b^{(n)} := C_n^{-1/2} \left(b_n - M_n + \sum_{r=1}^K A_r(n) M_{I_r^{(n)}} \right) \tag{4}$$

und Unabhängigkeitsbedingungen wie in (1).

Ziel der Kontraktionsmethode ist es, Aussagen folgender Form bereitzustellen:

Passende Konvergenz der Koeffizienten

$$A_r^{(n)} \to A_r^*, \quad b^{(n)} \to b^*, \quad (n \to \infty) \tag{5}$$

impliziert Verteilungskonvergenz der Größen (X_n) gegen einen Grenzwert X. Die Grenzverteilung $\mathcal{L}(X)$ wird durch eine Fixpunktgleichung charakterisiert, die sich aus der modifizierten Rekursionsgleichung (3) durch einen formalen Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt:

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{r=1}^K A_r^* X^{(r)} + b^*. \tag{6}$$

Hierbei sind $(A_1^*, \ldots, A_K^*, b^*)$, $X^{(1)}, \ldots, X^{(K)}$ unabhängig und $X^{(r)} \stackrel{d}{=} X$ für $r = 1, \ldots, K$.

Um die Fixpunkteigenschaft umzuformulieren, bezeichne $\mathcal{M}^d$ den Raum aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}^d$ und T die maßwertige Abbildung

$$T : \mathcal{M}^d \to \mathcal{M}^d, \quad \mu \mapsto \mathcal{L}\left(\sum_{r=1}^K A_r^* Z^{(r)} + b^* \right), \tag{7}$$

wobei $(A_1^*, \ldots, A_K^*, b^*)$, $Z^{(1)}, \ldots, Z^{(K)}$ unabhängig sind und $\mathcal{L}(Z^{(r)}) = \mu$ für $r = 1, \ldots, K$. Dass X Lösung der Fixpunktgleichung (6) ist, bedeutet gerade, dass die Verteilung $\mathcal{L}(X)$ von X ein Fixpunkt der Abbildung T ist.

Abbildungen vom Typ (7) haben häufig keine eindeutigen Fixpunkte im Raum aller Wahrscheinlichkeitsmaße, und die Charakterisierung der Mengen ihrer Fixpunkte ist bis auf einige Spezialfälle ein offenes und wichtiges Problem, vgl. Abschnitt 9.3. Die bei der Analyse von Algorithmen als Grenzverteilungen auftretenden Fixpunkte sind in der Regel durch zusätzliche Momentenbedingungen ausgezeichnet. Um dies im folgenden zu präzisieren, führen wir die folgenden Teilmengen von $\mathcal{M}^d$ ein:

$$\mathcal{M}_s^d := \{\mu \in \mathcal{M}^d : \|\mu\|_s < \infty\}, \quad s > 0, \tag{8}$$

$$\mathcal{M}_s^d(M) := \{\mu \in \mathcal{M}_s^d : \mathbb{E}\,\mu = M\}, \quad s \geq 1, \tag{9}$$

$$\mathcal{M}_s^d(M, C) := \{\mu \in \mathcal{M}_s^d(M) : \mathrm{Cov}(\mu) = C\}, \quad s \geq 2, \tag{10}$$

wobei $M \in \mathbb{R}^d$ und C eine symmetrische, positiv-definite $d \times d$ Matrix bezeichnen und $\|\mu\|_s$, $\mathbb{E}\,\mu$ sowie $\mathrm{Cov}(\mu)$ das s-te absolute Moment, den Erwartungswert und die Kovarianzmatrix einer Zufallsvariablen mit Verteilung μ bedeuten.

Der Zugang der Kontraktionsmethode besteht nun darin, eine passende Teilmenge $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{M}^d$, etwa eine der Mengen (8)–(10), mit einer vollständigen Metrik δ zu versehen, so dass die Restriktion von T auf $\mathcal{M}^*$ eine Kontraktion auf dem metrischen Raum $(\mathcal{M}^*, \delta)$ in Sinne des Banachschen Fixpunktsatzes bildet. Dies liefert dann einen in $\mathcal{M}^*$ eindeutigen Fixpunkt $\mathcal{L}(X)$ für T. In einem zweiten Schritt wird dann unter passenden Bedingungen der Form (5) Konvergenz der skalierten Größen $\mathcal{L}(X_n)$ gegen $\mathcal{L}(X)$ in der Metrik δ gezeigt, $\delta(\mathcal{L}(X_n), \mathcal{L}(X)) \to 0$ für $n \to \infty$. Ist δ so gewählt, dass Konvergenz in δ schwache Konvergenz impliziert, ist die gewünschte Verteilungskonvergenz gezeigt.

4 Die $\mathbf{L_2}$ Realisierung der Idee

In diesem Abschnitt wird die Realisierung der Idee der Kontraktionsmethode vermöge der minimalen L_2 Metrik ℓ_2, für den eindimensionalen Fall den Arbeiten Rösler (1991, 2001) sowie in allgemeiner Dimension d Neininger (2001) folgend, beschrieben. Anschließend werden Beispiele aus Abschnitt 2.2 aufgegriffen und besprochen, soweit sie sich mit der L_2 Realisierung der Kontraktionsmethode behandeln lassen.

4.1 Ein allgemeiner $\mathbf{L_2}$ Kontraktionssatz

Die minimalen L_p Metriken ℓ_p sind für $p > 0$ gegeben durch

$$\ell_p(\mu, \nu) := \inf \left\{ \|X - Y\|_p \ : \ \mathcal{L}(X) = \mu,\, \mathcal{L}(Y) = \nu \right\}, \quad \mu, \nu \in \mathcal{M}_p^d,$$

wobei $\|X\|_p := (\mathbb{E}\,\|X\|^p)^{(1/p)\wedge 1}$ die L_p Norm eines zufälligen Vektors X und $\|X\|$ seine euklidische Norm bezeichnen.

Die Räume $(\mathcal{M}_p^d, \ell_p)$ für $p > 0$ sowie $(\mathcal{M}_p^d(M), \ell_p)$ für $M \in \mathbb{R}^d$, $p \geq 1$ sind vollständige metrische Räume und Konvergenz in ℓ_p ist äquivalent zum gleichzeitigen Vorliegen von schwacher Konvergenz und Konvergenz der absoluten p-ten Momente. Zu $\mu, \nu \in \mathcal{M}_p^d$ existieren stets zufällige Vektoren X, Y auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathcal{L}(X) = \mu$, $\mathcal{L}(Y) = \nu$ und $\ell_p(\mu, \nu) = \|X - Y\|_p$. Derartige Vektoren heißen optimale Couplings von μ und ν. Für diese und weitere Eigenschaften der minimalen L_p Metrik ℓ_p vergleiche Dall'Aglio (1956), Major (1978), Bickel und Freedman (1981), Rachev (1991) und Rachev und Rüschendorf (1998).

Um Kontraktionseigenschaften der Abbildungen (7) formulieren zu können, bezeichnen wir mit $\|A\|_{\mathrm{op}} := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ den Spektralradius einer quadratischen Matrix A und mit A^t die zu A transponierte Matrix.

Lemma 4.1 *Sei* $(A_1^*, \dots, A_K^*, b^*)$ *ein quadratintegrierbarer Vektor von zufälligen* $d \times d$ *Matrizen* $A_1^* \dots, A_K^*$ *und eines zufälligen* d*-dimensionalen Vektors* b^* *mit* $\mathbb{E}\, b^* = 0$ *und die Abbildung* T *wie in (7). Dann ist die Restriktion von* T *auf* $\mathcal{M}_2^d(0)$ *Lipschitz stetig in* ℓ_2*, und für die Lipschitzkonstante* $\mathrm{lip}(T)$ *gilt*

$$\mathrm{lip}(T) \leq \left\| \mathbb{E} \sum_{r=1}^K (A_r^*)^t A_r^* \right\|_{\mathrm{op}}. \tag{11}$$

Der Beweis kann mit Hilfe optimaler Couplings geführt werden, vgl. Rösler (1992, 2001) für $d = 1$, Burton und Rösler (1995) für $K = 1$ sowie Neininger (2001, Lemma 3.1). Ist die rechte Seite von (11) kleiner als 1, so hat T genau einen Fixpunkt in $\mathcal{M}_2^d(0)$.

Der zweite Schritt der Kontraktionsmethode, Konvergenz in ℓ_2 für Folgen $(\mathcal{L}(X_n))$ der Form (3) zu zeigen, lässt sich im allgemeinen Rahmen wie folgt erhalten; vgl. Rösler (2001, Theorem 3.1) und Neininger (2001, Theorem 4.1).

Satz 4.2 *Sei* (X_n) *eine Folge zentrierter* d*-dimensionaler, quadratintegrierbarer Zufallsvektoren, die die Rekursion (3) erfüllen mit quadratintegrierbaren zufälligen* $d \times d$ *Matrizen und einem quadratintegrierbaren zufälligen zentrierten Vektor* $b^{(n)}$*. Es gelten die folgenden Bedingungen:*

$$\left(A_1^{(n)}, \dots, A_K^{(n)}, b^{(n)}\right) \xrightarrow{L_2} (A_1^*, \dots, A_K^*, b^*), \quad (n \to \infty), \tag{12}$$

$$\mathbb{E} \sum_{r=1}^K \left\|(A_r^*)^t A_r^*\right\|_{\mathrm{op}} < 1, \tag{13}$$

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{I_r^{(n)} \leq \ell\} \cup \{I_r^{(n)} = n\}} \left\|(A_r^{(n)})^t A_r^{(n)}\right\|_{\mathrm{op}}\right] \to 0, \quad (n \to \infty), \tag{14}$$

für alle $\ell \in \mathbb{N}$ *und* $r = 1, \dots, K$*. Dann gilt*

$$\ell_2(\mathcal{L}(X_n), \mathcal{L}(X)) \to 0, \quad (n \to \infty),$$

wobei $\mathcal{L}(X)$ *der in* $\mathcal{M}_2^d(0)$ *eindeutige Fixpunkt der Abbildung* T *aus (7) ist.*

Bedingung (12) bedeutet, dass die Konvergenz der Koeffizienten aus (5) hier in L_2 zu gelten hat. Dabei darf $(A_1^*, \dots, A_K^*, b^*)$ passend zu $(A_1^{(n)}, \dots, A_K^{(n)}, b^{(n)})$ auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum gewählt werden, das heißt (12) bedeutet

$$\ell_2(\mathcal{L}(A_1^{(n)}, \dots, A_K^{(n)}, b^{(n)}), \mathcal{L}(A_1^*, \dots, A_K^*, b^*)) \to 0. \tag{15}$$

Bedingung (13) ist nach der Jensenschen Ungleichung stärker als die Kontraktionsbedingung

$$\left\| \mathbb{E} \sum_{r=1}^K (A_r^*)^t A_r^* \right\|_{\mathrm{op}} < 1 \tag{16}$$

aus Lemma 4.1. Ob Bedingung (13) in Satz 4.2 durch die schwächere Bedingung (16) ersetzt werden kann, ist offen. Man vergleiche dazu auch die Diskussion in Neininger und Rüschendorf (2003).

Bedingung (14) ist eine technische Bedingung, deren Gültigkeit in Anwendungen meist leicht entschieden werden kann.

Für die Anwendung von Satz 4.2 auf rekursive Folgen (Y_n) wie in (1) ist zu beachten, dass in der Skalierung (2) der Vektor $M_n = \mathbb{E}\, Y_n$ gewählt werden muss, um die Voraussetzungen $\mathbb{E}\, X_n = 0$ und $\mathbb{E}\, b^{(n)} = 0$ zu erfüllen. Da andererseits $b^{(n)}$ in (4) die Größen M_n enthält und in (12) ein Grenzwert für $b^{(n)}$ zu bestimmen ist, impliziert dies, dass zur Anwendung von Satz 4.2 eine asymptotische Entwicklung des Erwartungswerts $\mathbb{E}\, Y_n$ bekannt sein muss. Dagegen kann die Kovarianzmatrix $\mathrm{Cov}(Y_n)$ in ihrer asymptotischen Entwicklung in erster Ordnung so geraten werden, dass sich Satz 4.2 anwenden lässt. Da Konvergenz in ℓ_2 Konvergenz der (gemischten) zweiten Momente impliziert, liefert Satz 4.2 dann gleichzeitig die Asymptotik der Kovarianzmatrix $\mathrm{Cov}(Y_n)$.

4.2 Anwendungen des $\mathbf{L_2}$ Settings

Es können nun einige der Beispiele aus Abschnitt 2.2 behandelt werden. Wie in Abschnitt 4.1 erläutet, ist dafür stets die asymptotische Kenntnis des ersten Moments notwendig.

4.2.1 Quicksort

Für die Anzahl der Schlüsselvergleiche Y_n von Quicksort ergibt sich im in Abschnitt 2.2.1 beschriebenen Modell

$$\mathbb{E}\, Y_n = 2(n+1)H_n - 4n = 2n \log n + c_p n + o(n), \tag{17}$$

wobei $H_n = \sum_{k=1}^n 1/k$ die n-te harmonische Zahl und log den natürlichen Logarithmus bezeichnen und $c_p = 2\gamma - 4$ mit der Euler-Mascheroni Konstanten γ. Diese Entwicklung des Erwartungswerts ist ausreichend für die Anwendung von Satz 4.2. Nach Skalierung und Bestimmung der Grenzwerte der Koeffizienten ergibt sich

$$\frac{Y_n - \mathbb{E}\, Y_n}{n} \xrightarrow{d} X,$$

wobei die Limesgleichung für X gegeben ist durch (6) bzw. (7) mit $A_1^* = U$, $A_2^* = 1 - U$ und $b^* = 1 + 2\mathcal{E}(U)$ mit U uniform auf $[0,1]$ verteilt und $\mathcal{E}(U) := U \log U + (1-U)\log(1-U)$, vgl. Rösler (1991) und für alternative Zugänge Hennequin (1989, 1991) und Régnier (1989). Die Anzahl der Schlüsselaustausche lässt sich analog behandeln und führt auf eine Limesgleichung, in der im Vergleich zur Limesgleichung der Schlüsselvergleiche nur b^* zu $b^* = U(1-U) + \mathcal{E}(U)/3$ geändert werden muss.

4.2.2 Bewertungen zufälliger Binärsuchbäume

Für die in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen Bewertungen Y_n zufälliger Binärsuchbäume hängt die Anwendbarkeit von Satz 4.2 von der Größenordnung des Tollterms b_n ab. Falls $\mathbb{E}\, b_n = n^\alpha L(n) + o(n^\alpha L(n))$ für ein $\alpha > 1/2$ und L eine bei Unendlich langsam variierende Funktion, so lassen sich der Erwartungswert hinreichend genau entwickeln und Satz 4.2 unter schwachen zusätzlichen Voraussetzungen an b_n anwenden. Dies führt auf eine nur von α abhängende Familie von Grenzverteilungen, vgl. Hwang und Neininger (2002). Für Tollterme mit kleiner Ordnung des Erwartungswerts, etwa $\mathbb{E}\, b_n = O(\sqrt{n})$, lässt sich Satz 4.2 nicht anwenden, vgl. Abschnitt 7.2.5.

4.2.3 Wiener Index zufälliger Binärsuchbäume

Für den Wiener Index W_n zufälliger Binärsuchbäume aus Abschnitt 2.2.3 gilt

$$\mathbb{E}\, W_n = 2n^2 H_n - 6n^2 + 8nH_n - 10n + 6H_n = 2n^2 \log n + c_w n^2 + o(n^2), \qquad (18)$$

mit $c_w = 2\gamma - 6$. Dies führt zusammen mit der Entwicklung des Erwartungswerts der internen Pfadlänge aus (17) auf die Anwendbarkeit von Satz 4.2 mit Limesgleichung (6) bzw. (7) gegeben durch

$$A_1^* = \begin{bmatrix} (1-U)^2 & U(1-U) \\ 0 & 1-U \end{bmatrix}, \quad A_2^* = \begin{bmatrix} (1-U)^2 & U(1-U) \\ 0 & 1-U \end{bmatrix},$$

$$b^* = \begin{pmatrix} 6U(1-U) + 2\,\mathcal{E}(U) \\ 1 + 2\,\mathcal{E}(U) \end{pmatrix},$$

wobei U und $\mathcal{E}(U)$ wie in Abschnitt 4.2.1 sind, vgl. Neininger (2002).

Die Anwendbarkeit der Kontraktionsmethode liegt interessanterweise entscheidend an der Relation $c_w = c_p - 2$ der Konstanten c_p und c_w aus (17) und (18). Dies legt eine Relation der entsprechenden Konstanten für die universellen Splitbaum Modelle aus Devroye (1999) nahe:

$$c_w = c_p - \frac{b\,\mathbb{E}\, V^2}{1 - b\,\mathbb{E}\, V^2}, \qquad (19)$$

wobei b den Verzweigungsgrad und V den Splitter (vgl. Devroye (1999)) bezeichnen. Die Vermutung (19) steht für “nicht zu konzentrierte” Splitter und ist in Neininger (2002, Seite 596 oben) dadurch motiviert, dass nur diese Relation eine Anwendbarkeit der Kontraktionsmethode zulassen würde. Die Gültigkeit der Vermutung kann in Spezialfällen unter Einsatz nichttrivialer analytischer Methoden entschieden werden, etwa für zufällige Quadrantenbäume vergleiche man Flajolet et al. (1995), für m-näre Suchbäume Chern and Hwang (2001b) und für Median von $2t+1$ Suchbäume Chern und Hwang (2001a).

Für die stochastische Analyse des Wiener Index einer anderen Familie zufälliger Bäume (der “simply generated random trees) siehe Janson (2003).

4.2.4 Randomisierte Spielbaum Auswertung

Für die in Anschnitt 2.2.8 angegebene worst case Komplexität Y_n des randomisierten Algorithmus von Snir (1985) zur Auswertung von Spielbäumen kann der Erwartungswert exakt bestimmt werden. Die erste Koordinate $Y_{n,1}$ von Y_n beschreibt die worst case Komplexität und erfüllt

$$\mathbb{E}\, Y_{n,1} = c_1 n^\alpha - c_2 n^\beta$$

mit

$$\alpha = \log_2 \frac{1+\sqrt{33}}{4}, \quad \beta = \log_2 \frac{\sqrt{33}-1}{4}, \quad c_1 = \frac{1}{2} + \frac{7}{2\sqrt{33}}, \quad c_2 = c_1 - 1.$$

Zusammen mit $\mathbb{E}\, Y_{n,2}$ ist dies ausreichend für die Anwendung von Satz 4.2, vgl. Ali Khan und Neininger (2004), wo hauptsächlich große Abweichungen von $Y_{n,1}$ vom Erwartungswert studiert werden.

4.2.5 Größe kritischer Galton Watson Bäume

Der in Abschnitt 2.2.10 beschriebene Zugang zur Größe kritischer Galton Watson Bäume (bedingt auf Überleben der n-ten Generation) über eine Variante der Rekursionsgleichung (1) führt im Falle endlicher Varianz der Offspring Verteilung auf eine Anwendbarkeit des Satz 4.2 entsprechenden Grenzwertsatzes. Die Exponentialverteilung (mit Parameter 1) ergibt sich hierbei als der in $\mathcal{M}_2^1(1)$ eindeutige Fixpunkt der Abbildung (7) mit $K = 2$, $A_1^* = A_2^* = U$ und $b^* = 0$ mit U uniform auf $[0, 1]$ verteilt, vgl. Geiger (2000), wo ebenfalls mit der ℓ_2 Metrik argumentiert wird. Fälle von Offspring Verteilungen, die im Anziehungsbereich α-stabiler Verteilungen mit $1 < \alpha < 2$ liegen, können in diesem Rahmen nicht abgedeckt werden. Wir kommen darauf in Abschnitt 7.2.6 zurück.

5 Beschränkungen des $\mathbf{L_2}$ Settings

In diesem Abschnitt betrachten wir den eindimensionalen Fall $d = 1$. Die Kontraktionsbedingung (16) und Bedingung (13) sind für $d = 1$ identisch:

$$\mathbb{E} \sum_{r=1}^{K} (A_r^*)^2 < 1. \tag{20}$$

In einer Vielzahl von Anwendungen wird man auf die Limesgleichung (6),

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{r=1}^{K} A_r^* X^{(r)} + b^*,$$

mit

$$b^* = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{r=1}^{K} (A_r^*)^2 = 1 \tag{21}$$

geführt, etwa in den in den Abschnitten 2.2.2, 2.2.5–2.2.7 und 2.2.9 beschriebenen Anwendungen. Die Koeffizienten $A_1^*, \ldots, A_K^*$ können dabei nach wie vor zufällig sein, die Summe ihrer Quadrate ist jedoch fast sicher gleich 1.

Aus der Faltungseigenschaft der Normalverteilung folgt direkt, dass alle zentrierten, normalverteilten Zufallsvariablen Lösung der Limesgleichung (6) unter (21) sind. Schließt man den trivialen Fall aus, dass die Koeffizienten $A_1^*, \ldots, A_K^*$ fast sicher nur die Werte 0 und 1 annehmen, so ist bekannt, dass die Menge der Fixpunkte der entsprechenden Abbildungen T aus (7) genau die Menge

$$\mathcal{F} := \{\mathcal{N}(0, \sigma^2) \ : \ \sigma \geq 0\}$$

ist, wobei $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ die zentrierte Normalverteilung mit Varianz σ^2 bedeutet, was wir im Falle $\sigma = 0$ als das Dirac Maß in 0 interpretieren. Da sich die Bedingungen (20) und (21) widersprechen, kann Satz 4.2 nicht direkt angewendet werden. Dies ist jedoch ein prinzipielles Problem der Kontraktionsmethode: Da Fixpunkte von Abbildungen T aus (7), wobei die Koeffizienten Bedingung (21) erfüllen, wegen $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_2^1(0)$ in $\mathcal{M}_2^1(0)$ nicht eindeutig sind, kann T nicht Kontraktion sein auf $(\mathcal{M}_2^1(0), \delta)$ für beliebige Metriken δ auf $\mathcal{M}_2^1(0)$.

Für den Fall von Limesgleichungen (6) mit Bedingung (21) war in speziellen algorithmischen Problemen bekannt, dass tatsächlich die Normalverteilung als Grenzverteilung auftritt. In Abschnitt 7.1 wird beschrieben, wie ein universelles Normalverteilungsresultat (Korollar 7.5) in diese Richtung im Rahmen der Kontraktionsmethode erzielt werden kann. Dazu werden der Raum $\mathcal{M}_2^1(0)$ verfeinert, um die Eindeutigkeit des Fixpunkts sicherzustellen, und ideale Metriken verwendet, die ideal von Ordnung größer als 2 sind, um Kontraktionseigenschaften zu erhalten.

Ein anderes Problem des L_2 Settings besteht darin, dass konkrete Probleme der Informatik und anderer Gebiete, etwa das Profil zufälliger Binärsuchbäume (Abschnitt 2.2.12) oder die Größe kritischer Galton Watson Bäume bedingt auf Überleben der relevanten Generation bei Offspringverteilungen mit unendlicher Varianz (Abschnitt 2.2.10), auf Grenzverteilungen führen, die keine endlichen zweiten Momente besitzen. Dies kann nicht einfach dadurch behoben werden, statt mit ℓ_2 mit einer minimalen L_p Metrik ℓ_p mit passendem $p < 2$ zu arbeiten. Der in Abschnitt 7.1 entwickelte Zugang mit idealen Metriken ist hinreichend flexibel, um die bisher in den Anwendungen aufgetretenen Fälle zu behandeln, vgl. Abschnitte 7.2.6 und 7.2.7.

Ein weiteres prinzipielles Problem der Kontraktionsmethode, das von der verwendeten Metrik unabhängig ist, bilden degenerierter Fixpunktgleichungen. Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall $d = 1$, $K = 1$ und $A_1(n) = 1$, der in Anwendungen häufig anzutreffen ist, vgl. etwa Abschnitt 2.2.3. Die Rekursion (1) für (Y_n) hat nun, mit $I_n = I_1^{(n)}$, die Form

$$Y_n \stackrel{d}{=} Y_{I_n} + b_n, \quad n \geq n_0.$$

Die Skalierung $X_n := (Y_n - \mu_n)/\sigma_n$ wie in (2) ergibt die modifizierte Rekusionsgleichung

$$X_n \stackrel{d}{=} \frac{\sigma_{I_n}}{\sigma_n} X_{I_n} + b^{(n)}, \quad n \geq n_0,$$

mit

$$b^{(n)} := \frac{1}{\sigma_n} \left(b_n - \mu_n + \mu_{I_n}\right).$$

Typischerweise lassen sich bei sinnvoller Wahl von μ_n und σ_n Grenzwerte der Koeffizienten

$$\frac{\sigma_{I_n}}{\sigma_n} \to A^*, \quad b^{(n)} \to b^*$$

finden, und wir erhalten die Limesgleichung

$$X \stackrel{d}{=} A^* X + b^*,$$

wobei (A^*, b^*) und X unabhängig sind.

In einer Reihe von Anwendungen wird man dabei auf den Fall $A^* = 1$ und $b^* = 0$ geführt, das heißt man erhält die degenerierte Limesgleichung

$$X \stackrel{d}{=} X. \tag{22}$$

Die degenerierte Limesgleichung liefert keine Information über die mögliche Grenzverteilungen und das Konzept der Kontraktionsmethode muss hier wesentlich erweitert werden. Fälle degenerierter Fixpunktgleichungen treten bei der Analyse von Algorithmen in natürlicher Weise auf, falls $\mathrm{Var}(Y_n) = L(n) + o(L(n))$ mit einer Funktion L, die langsam variierend bei Unendlich ist. Da im wesentlichen $\sigma_n = \sqrt{\mathrm{Var}(Y_n)}$ gewählt werden muss, erhält man

$$\frac{\sigma_{I_n}}{\sigma_n} = \sqrt{\frac{L(I_n)}{L(n)}} + o(1) \to A^* = 1, \quad (n \to \infty),$$

fast sicher unter recht allgemeinen Bedingungen an I_n. Falls ferner b_n hinreichend klein ist, so dass $b^{(n)} = \frac{1}{\sigma_n}(b_n - \mu_n + \mu_{I_n}) \to 0$ fast sicher, so erhalten wir eine degenerierte Fixpunktgleichung. Wir diskutieren in Abschnitt 8 einen universellen zentralen Grenzwertsatz, mit dem eine Reihe relevanter Anwendungen behandelt werden können.

6 Ideal Metriken — die Zolotarev Metrik

Eine Wahrscheinlichkeitsmetrik $\tau(X,Y)$ ist für zufällige Vektoren X, Y definiert und hängt im allgemeinen von der gemeinsamen Verteilung $\mathcal{L}(X,Y)$ von X und Y ab. Die Wahrscheinlichkeitsmetrik τ heißt einfach, falls $\tau(X,Y) = \tau(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y))$ nur von den Randverteilungen $\mathcal{L}(X)$, $\mathcal{L}(Y)$ von X und Y abhängt. Einfache Wahrscheinlichkeitsmetriken auf dem Raum der Paare von Zufallsvariablen induzieren Metriken auf $\mathcal{M}^d$ bzw. auf Teilmengen, auf denen sie endliche Werte annehmen. Nur solche werden im folgenden betrachtet. Eine einfache Wahrscheinlichkeitsmetrik τ heißt $(s,+)$ ideal (oder ideal von der Ordnung $s > 0$), falls

$$\tau(X+Z, Y+Z) \leq \tau(X,Y)$$

für alle Z unabhängig von (X,Y) und

$$\tau(cX, cY) = c^s \tau(X,Y).$$

für alle $c > 0$ gelten.

Die folgende Realisierung der Idee der Kontraktionsmethode beruht wesentlich auf der Verwendung $(s,+)$ idealer Metriken. Es stellt sich heraus, dass die Flexibilität im Index s erlaubt, sowohl verschiedene der in Abschnitt 5 beschriebenen prinzipiellen Probleme zu beheben als auch zahlreiche Probleme aus den Anwendungen in der Informatik und verwandter Gebiete universell zu behandeln.

Zolotarev (1976) konstruierte für zufällige Vektoren X, Y in $\mathbb{R}^d$ die einfache Wahrscheinlichkeitsmetrik

$$\zeta_s(X,Y) = \sup_{f \in \mathcal{F}_s} |\mathbb{E}\,[f(X) - f(Y)]| \tag{23}$$

wobei $s = m + \alpha$ mit $0 < \alpha \leq 1$, $m \in \mathbb{N}_0$, und

$$\mathcal{F}_s := \{f \in C^m(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) : \|f^{(m)}(x) - f^{(m)}(y)\| \leq \|x-y\|^\alpha\},$$

dem Raum der m mal stetig differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$, deren m-te Ableitung Hölder stetig von der Ordnung α ist. Wir schreiben auch $\zeta_s(\mathcal{L}(X_n), \mathcal{L}(X)) = \zeta_s(X_n, X)$. Wir haben $\zeta_s(X,Y) < \infty$, falls alle gemischten Momente der Ordnungen $1, \ldots, m$ von X und Y gleich sind und die s-ten absoluten Momente von X und Y endlich sind. Insbesondere sind also $(\mathcal{M}_s^d, \zeta_s)$ für $0 < s \leq 1$, $(\mathcal{M}_s^d(M), \zeta_s)$ für $1 < s \leq 2$ und $(\mathcal{M}_s^d(M,C), \zeta_s)$ für $2 < s \leq 3$ metrische Räume mit $M \in \mathbb{R}^d$ und C einer symmetrischen, positive definiten $d \times d$ Matrix. Die Metrik ζ_s ist $(s,+)$ ideal und Konvergenz in ζ_s impliziert schwache Konvergenz. Für $d \times d$ Matrizen A gilt

$$\zeta_s(AX, AY) \leq \|A\|_{\mathrm{op}}^s \zeta_s(X,Y).$$

Für weitere Eigenschaften, insbesondere untere und obere Abschätzungen der Zolotarev Metrik durch andere Metriken, verweisen wir auf Zolotarev (1976, 1977), Rachev (1991) und Neininger und Rüschendorf (2004a).

Wir werden ausschließlich die Zolotarev Metrik verwenden, da für diese Metrik benötigte Eigenschaften direkt aus der Literatur übernommen werden können. Entscheidend für den hier gegebenen Zugang ist jedoch, dass die verwendete Metrik $(s, +)$ ideal ist. Deshalb kommen für die folgenden Untersuchungen prinzipiell auch andere $(s, +)$ ideale Metriken in Betracht; für Beispiele für die Verwendung alternativer idealer Metriken bei der Analyse von Algorithmen vgl. Rachev und Rüschendorf (1995), Cramer (1995) und Hwang und Neininger (2002).

7 Die ζ_s Realisierung der Idee

In diesem Abschnitt wird die Kontraktionsmethode unter Verwendung idealer Metriken, hier der Zolotarev Metrik, Neininger und Rüschendorf (2004a) folgend entwickelt. Zunächst wird ein allgemeiner Kontraktionssatz bereitgestellt, der in verschiedene Richtungen spezialisiert werden kann. Damit wird insbesondere das in Abschnitt 5 beschriebene Problem asymptotischer Normalität gelöst. Anschließend werden weitere der Beispiele aus Abschnitt 2.2 besprochen.

7.1 Ein allgemeiner Kontraktionssatz in ζ_s

Für eine Realisierung der Kontraktionsmethode in der ζ_s Metrik werden zunächst Kontraktionsbedingungen für die Abbildung T aus (7) benötigt.

Lemma 7.1 *Sei $(A_1^*, \dots, A_K^*, b^*)$ ein s-fach integrierbarer Vektor, $s > 0$, von zufälligen $d \times d$ Matrizen $A_1^* \dots, A_K^*$ und eines zufälligen d-dimensionalen Vektors b^* und sei die Abbildung T gegeben gemäß (7). Für $\mu, \nu \in \mathcal{M}_s^d$ mit identischen gemischten Momenten aller Ordnungen kleiner als s gilt*

$$\zeta_s(T(\mu), T(\nu)) \leq \left(\mathbb{E} \sum_{r=1}^{K} \|A_r^*\|_{\mathrm{op}}^s \right) \zeta_s(\mu, \nu).$$

Um nun Kontraktionen T auf einem metrischen Raum $(\mathcal{M}^*, \zeta_s)$ mit $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{M}^d$ zu erhalten, muss sichergestellt werden, dass ζ_s endlich auf $\mathcal{M}^*$ ist und zusätzlich $T(\mathcal{M}^*) \subset \mathcal{M}^*$ gilt, T also abgeschlossen auf $\mathcal{M}^*$ ist.

Für die Endlichkeit von ζ_s ist zu beachten, dass sich mit Skalierungen der Form (2) nur die ersten beiden (gemischten) Momente kontrollieren lassen . Für die Endlichkeit von $\zeta_s(X_n, X)$ mit einem allgemeinen X_n wie in (2) und einem Fixpunkt $\mathcal{L}(X)$ der Abbildung T lässt sich daher ohne besondere Annahmen nur der Bereich $0 < s \leq 3$ nutzen.

Für die Abgeschlossenheit von T auf $\mathcal{M}^*$ verwenden wir die Räume aus (8)–(10) wie schon in Abschnitt 6: $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}_s^d$ für $0 < s \leq 1$, $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}_s^d(M)$ für $1 < s \leq 2$ und $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}_s^d(M, C)$ für $2 < s \leq 3$. Damit die Abbildung T auf $\mathcal{M}^*$ dann abgeschlossen ist, ergeben sich in den Fällen $1 < s \leq 2$ und $2 < s \leq 3$ jeweils Bedingungen zwischen M, C und $(A_1^*, \ldots, A_K^*, b^*)$; vgl. Neininger und Rüschendorf (2004a, Lemma 3.2a). Durch passende Wahl von M_n und C_n in (2) kann man jedoch stets den Fall $M = 0$ und $C = \mathrm{Id}_d$ erhalten, wobei Id_d die d-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet. Dann lässt sich als Ergebnis dieser Überlegungen folgendes Lemma über die Kontraktion von T in ζ_s und die Existenz von Fixpunkten von T beweisen (Neininger und Rüschendorf (2004a, Korollar 3.4)):

Lemma 7.2 *Seien $(A_1^*, \ldots, A_K^*, b^*)$ und T wie in (7) gegeben mit s-fach integrierbarem $(A_1^*, \ldots, A_K^*, b^*)$, $0 < s \leq 3$, und $\mathbb{E} \sum_{r=1}^K \|A_r^*\|_{\mathrm{op}}^s < 1$. Falls*

$$\begin{cases} \mathbb{E}\, b^* = 0 & \textit{für } 1 < s \leq 2, \\ \mathbb{E}\, b^* = 0 \textit{ und } \mathbb{E}\,[b^*(b^*)^t] + \mathbb{E} \sum\limits_{r=1}^K A_r^*(A_r^*)^t = \mathrm{Id}_d & \textit{für } 2 < s \leq 3, \end{cases}$$

so hat T einen Fixpunkt, der eindeutig ist in

$$\begin{cases} \mathcal{M}_s^d & \textit{für } 0 < s \leq 1, \\ \mathcal{M}_s^d(0) & \textit{für } 1 < s \leq 2, \\ \mathcal{M}_s^d(0, \mathrm{Id}_d) & \textit{für } 2 < s \leq 3. \end{cases}$$

Dieses Lemma entspricht im eindimensionalen Fall für $s = 2$ gerade der Aussage von Lemma 4.1. Die Vorteile der zusätzlichen Flexibilität in $0 < s \leq 3$ werden sich im weiteren zeigen.

Für das beabsichtigte, Satz 4.2 entsprechende Konvergenzresultat betrachten wir wieder eine Folge (Y_n) wie in (1) mit skalierten Größen (X_n) wie in (2). Wir werden wieder die drei Fälle $0 < s \leq 1$, $1 < s \leq 2$ und $2 < s \leq 3$ unterscheiden. Im Falle $2 < s \leq 3$ nehmen wir zusätzlich an, dass Y_n reguläre Kovarianzmatrizen für alle $n \geq n_1$ für ein $n_1 \geq n_0$ hat. Für die Skalierung in (2) vereinbaren wir

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_n \text{ symmetrisch, positiv definit} & \text{für } 0 < s \leq 1, \\ M_n = \mathbb{E}\, Y_n \text{ und } C_n \text{ symmetrisch, positiv definit} & \text{für } 1 < s \leq 2, \\ M_n = \mathbb{E}\, Y_n \text{ und } C_n = \mathrm{Cov}(Y_n) \text{ für } n \geq n_1 & \text{für } 2 < s \leq 3. \end{array} \right\} \tag{24}$$

Dann gilt folgender Satz (Neininger und Rüschendorf (2004a, Theorem 4.1)):

Satz 7.3 *Seien $0 < s \leq 3$ und (Y_n) eine Folge s-fach integrierbarer Zufallsvektoren wie in (1) mit allen Matrizen und Vektoren dort s-fach integrierbar. Sei (X_n) die gemäß (2) unter Bedingung (24) skalierte Folge. Falls*

$$\left(A_1^{(n)}, \ldots, A_K^{(n)}, b^{(n)}\right) \xrightarrow{L_s} \left(A_1^*, \ldots, A_K^*, b^*\right), \quad (n \to \infty) \tag{25}$$

$$\mathbb{E} \sum_{r=1}^{K} \|A_r^*\|_{\mathrm{op}}^s < 1, \tag{26}$$

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{I_r^{(n)} \leq \ell\} \cup \{I_r^{(n)} = n\}} \|A_r^{(n)}\|_{\mathrm{op}}^s\right] \to 0, \quad (n \to \infty) \tag{27}$$

für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und $r = 1 \ldots, K$, dann folgt

$$\zeta_s(\mathcal{L}(X_n), \mathcal{L}(X)) \to 0, \quad (n \to \infty),$$

wobei $\mathcal{L}(X)$ der in Lemma 7.2 beschriebene eindeutige Fixpunkt der Abbildung T aus (7) ist.

Bedingung (25) ist analog zu Bedingung (12) gemäß (15) zu verstehen.

Entscheidend in Satz 7.3 ist die Flexibilität im Parameter s. Aus Sicht der Anwendung sind die drei Fälle $0 < s \leq 1$, $1 < s \leq 2$ und $2 < s \leq 3$ substanziell verschieden. Im Falle $2 < s \leq 3$ erfordert die Bedingung $\mathcal{L}(X_n) \in \mathcal{M}_s^d(0, \mathrm{Id}_d)$, dass die ursprüngliche Folge (Y_n) in (2) mit dem exakten Erwartungswert und der exakten Kovarianzmatrix skaliert wird, vgl. (24). Um die Grenzwerte von $(A_1^{(n)}, \ldots, A_K^{(n)}, b^{(n)})$ in (25) zu bestimmen, muss auf die Darstellungen von $A_r^{(n)}$ und $b^{(n)}$ in (4) zurückgegriffen werden, die die Größen M_n and C_n beinhalten. Deshalb müssen für die Anwendung von Satz 7.3 mit $2 < s \leq 3$ Entwicklungen von $\mathbb{E}\, Y_n$ und $\mathrm{Cov}(Y_n)$ im voraus bekannt sein. Dies unterscheidet den Fall $2 < s \leq 3$ von den Fällen $s \leq 2$. Für $1 < s \leq 2$ muss lediglich $\mathcal{L}(X_n) \in \mathcal{M}_s^d(0)$ sichergestellt werden, was impliziert, dass zur Anwendung des Satzes lediglich eine Entwicklung des Erwartungswerts $M_n = \mathbb{E}\, Y_n$ bekannt sein muss. Die Entwicklung der Kovarianzmatrix kann in erster Ordnung geraten werden und wird von Satz 7.3 dann zusammen mit der schwachen Konvergenz impliziert. Falls Satz 7.3 mit $s \leq 1$ angewandt werden kann, sind folglich keine Informationen über Entwicklungen von Momenten nötig. Eine passende Anwendung des Satzes liefert dann zusammen mit der schwachen Konvergenz eine Entwicklung des Erwartungswerts.

Um einen ersten Eindruck von der Vielseitigkeit von Satz 7.3 zu erhalten, betrachten wir in der Rekursion (1) für (Y_n) als Spezialfall den eindimensionalen Fall $d = 1$ mit $A_1(n) = \cdots = A_K(n) = 1$, der in Anwendungen auf Algorithmen häufig auftritt,

$$Y_n \stackrel{d}{=} \sum_{r=1}^{K} Y_{I_r^{(n)}}^{(r)} + b_n, \quad n \geq n_0, \tag{28}$$

mit Bedingungen wie in (1) und $\mathrm{Var}(Y_n) > 0$ für alle $n \geq n_1 \geq n_0$. Wir nehmen an, dass für Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ mit $g(n) > 0$ für alle n hinreichend groß gilt:

$$\left(\frac{g(I_r^{(n)})}{g(n)}\right)^{1/2} \xrightarrow{L_s} A_r^* \text{ für } r = 1, \ldots, K \text{ mit } \mathbb{E} \sum_{r=1}^{K} (A_r^*)^s < 1, \tag{29}$$

und

$$\frac{1}{g^{1/2}(n)} \left(b_n - f(n) + \sum_{r=1}^{K} f(I_r^{(n)}) \right) \xrightarrow{L_s} b^*. \tag{30}$$

Satz 7.4 *Seien $0 < s \leq 3$ und (Y_n) eine Folge s-fach integrierbarer Zufallsvariablen mit (28) und b_n dort s-fach integrierbar. Seien f und g Funktionen mit (29) und (30). Falls*

$$\begin{cases} \mathbb{E}\, Y_n = f(n) + o(g^{1/2}(n)) & \textit{für } 1 < s \leq 2, \\ \mathbb{E}\, Y_n = f(n) + o(g^{1/2}(n)) \textit{ und } \mathrm{Var}(Y_n) = g(n) + o(g(n)) & \textit{für } 2 < s \leq 3, \end{cases}$$

so

$$\frac{Y_n - f(n)}{g^{1/2}(n)} \xrightarrow{d} X,$$

wobei $\mathcal{L}(X)$ der in Lemma 7.2 beschriebene eindeutige Fixpunkt der Abbildung T aus (7) ist und $\xrightarrow{d}$ Konvergenz in Verteilung bezeichnet.

In Satz 7.4 wird nun deutlich, inwieweit Entwicklungen der Momente von Y_n in den Fällen $2 < s \leq 3$ und $1 < s \leq 2$ im voraus bekannt sein müssen. Eine weitere Spezialisierung liefert eine Lösung zu einem der in Abschnitt 5 beschriebenen Probleme des L_2 Settings.

Korollar 7.5 *Sei (Y_n) eine Folge s-fach integrierbarer Zufallsvariablen wie in (28) mit b_n dort s-fach integrierbar. Gelte $\mathbb{E}\, Y_n = f(n) + o(g^{1/2}(n))$ und $\mathrm{Var}(Y_n) = g(n) + o(g(n))$ und für ein $2 < s \leq 3$*

$$\left(\frac{g(I_r^{(n)})}{g(n)}\right)^{1/2} \xrightarrow{L_s} A_r^*, \quad \sum_{r=1}^{K} (A_r^*)^2 = 1, \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{r=1}^{K} \{A_r^* \in \{0,1\}\} \right) < 1$$

und

$$\frac{1}{g^{1/2}(n)} \left(b_n - f(n) + \sum_{r=1}^{K} f(I_r^{(n)}) \right) \xrightarrow{L_s} 0.$$

Dann gilt

$$\frac{Y_n - f(n)}{g^{1/2}(n)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Es zeigt sich in Anwendung aus der Analyse von Algorithmen, dass die Mehrzahl der Kenngrößen zufälliger Bäume und rekursiver Algorithmen, die auf asymptotische Normalität führen, gerade mit Korollar 7.5 universell behandelt werden können, vgl. Abschnitt 7.2. Diese Fälle führen in Korollar 7.5 auf Anwendungen der ζ_s Metrik für $2 < s \leq 3$. Wie zuvor erläutert, impliziert dies, dass asymptotische Entwicklungen für Erwartungswerte und Varianzen im voraus bekannt sein müssen. Dies entspricht dem heuristischen Prizip aus der Arbeit von Pittel (1999) "Normal convergence problem? Two moments and a recurrence may be the clues".

Die Nützlichkeit verschiedener Metriken aus Sicht der Anwendungen auf Rekursionen von Typ (1) lässt an ihren Kontraktionseigenschaften für die Abbildung (7) ablesen. In Dimension $d = 1$ etwa haben wir für ℓ_2 als Kontraktionsbedingung aus Satz 4.2

$$\mathbb{E} \sum_{r=1}^{K} (A_r^*)^2 < 1.$$

Für allgemeines ℓ_p, $p > 0$, lässt sich ein Satz 4.2 entsprechendes Resultat unter der Kontraktionsbedingung

$$\sum_{r=1}^{K} \|A_r^*\|_p < 1 \tag{31}$$

zeigen. Es ist bekannt, dass in ℓ_p die Abbildung (7) auf $\mathcal{M}_p^1(0)$ für $1 < p \leq 2$ auch unter

$$\mathbb{E} \sum_{r=1}^{K} (A_r^*)^p < 1 \tag{32}$$

eine Kontraktion bildet, jedoch ist derzeit offen, ob dies auch für ein Satz 4.2 entsprechendes Konvergenzresultat ausreichend ist. Für die Zolotarev Metrik ζ_s haben wir auf den entsprechenden Räumen die Kontraktionsbedingung

$$\mathbb{E} \sum_{r=1}^{K} (A_r^*)^s < 1. \tag{33}$$

In typischen algorithmischen Anwendungen gilt $A_1(n) = \cdots = A_K(n) = 1$ und die Varianz von Y_n ist häufig (bis auf periodische Faktoren) monoton wachsend. Dies impliziert in diesen Fällen, dass die zugehörigen Limesgleichungen Koeffizienten $A_1^*, \ldots, A_K^*$ mit $0 \leq A_r^* \leq 1$ für $r = 1, \ldots, K$ haben. Die Kontraktionsbedingungen in (32) und (33) werden daher schwächer je größer s bzw. p gewählt werden. Wie im Anschluss an Satz 7.3 erläutert, müssen die für wachsendes s verbesserten Kontraktionseigenschaften jedoch mit Information über die Momente von Y_n "erkauft" werden. Es ist liegt also eine Art Gleichgewicht zwischen Kontraktioneigenschaften und Momenteninput vor. In diesem Lichte ist in diesen Fällen Bedingung (31) wenig nützlich. Das L_2 Setting aus Abschnitt 4.1 ist in Dimension $d = 1$ etwa so mächtig wie Satz 7.3 mit $s = 2$, für $d \geq 2$ bestehen dagegen Unterschiede, vgl. Neininger und Rüschendorf (2003).

Eine interessante Limesgleichung mit Koeffizienten $A_1^*, \ldots, A_K^*$, die Werte größer als 1 annehmen, wird sich in (37) für die Profile zufälliger Binärsuchbäume in Abschnitt 7.2.7 ergeben. Die Besonderheit dort ist der in der Rekursion auftretende zweite Index k. Im Gebiet der Analyse von Algorithmen sind Profile von Splitbaum Modellen (wie in Abschnitt 7.2.7) die derzeit ersten Beispiele derartiger Limesgleichungen.

7.2 Anwendungen des ζ_s Settings

Mit Satz 7.3 können weitere der Beispiele aus Abschnitt 2.2 behandelt werden. Wir beginnen mit Fällen, die auf asymptotische Normalität führen und von Korollar 7.5 abgedeckt werden.

7.2.1 Größe zufälliger m-närer Suchbäume

Für die Größe Y_n zufälliger m-närer Suchbäume gelten für Erwartungswert und Varianz im Falle $3 \leq m \leq 26$ die Entwicklungen

$$\mathbb{E}\, Y_n = \frac{1}{2(H_m - 1)} n + O(1 + n^{\alpha - 1}), \quad \mathrm{Var}(Y_n) = \gamma_m n + o(n),$$

mit $\gamma_m > 0$ und $\alpha < 3/2$ von m abhängend. Korollar 7.5 lässt sich mit $f(n) = \frac{1}{2(H_m-1)} n$ und $g(n) = \gamma_m n$ direkt anwenden. Dies liefert den zentralen Grenzwertsatz aus Mahmoud und Pittel (1989) und Lew und Mahmoud (1994). Für $m > 26$ zeigten Hwang und Chern (2001), dass die exakt standardisierte Größe $(Y_n - \mathbb{E}\, Y_n)/\sqrt{\mathrm{Var}(Y_n)}$ wegen periodischen Phänomene nicht in Verteilung konvergiert, vgl. dazu auch Chauvin und Pouyanne (2004) und Fill und Kapur (2004b).

7.2.2 Größe und Pfadlänge zufälliger Tries

Für die in Abschnitt 2.2.6 beschriebene Größe Y_n zufälliger Tries gilt

$$\mathbb{E}\, Y_n = n\varpi_1(\log_2 n) + O(1), \quad \mathrm{Var}(Y_n) = n\varpi_2(\log_2 n) + O(1),$$

wobei ϖ_1, ϖ_2 positive, beliebig oft differenzierbare Funktionen mit Periode 1 sind. Die Bedingungen aus Korollar 7.5 können mit etwas Rechnung verifiziert werden, vgl. Neininger und Rüschendorf (2004a, Seiten 403-406). Dies liefert den zentralen Grenzwertsatz aus Jacquet and Régnier (1986).

Eine Analyse der Anwendung von Korollar 7.5 liefert, dass an Eigenschaften der periodischen Funktionen ϖ_1, ϖ_2 lediglich benutzt wurde, dass beide Funktionen strikt positiv sind, ϖ_1 stetig differenzierbar ist und ϖ_2 stetig ist. Korollar 7.5 hat unter diesen Annahmen für derartige zu digitalen Strukturen (i.e. Tries, digitale Suchbäume, Patricia Tries) gehörenden Rekursionen universellen Charakter. Deshalb können insbesondere auch die externe (bzw. interne) Pfadlängen von Tries (externe), digitalen Suchbäumen (interne) und Patricia Tries (interne), deren Entwicklungen der ersten beiden Momente von diesem Typ sind, behandelt werden, vgl. für andere Zugänge auch Jacquet und Régnier (1986, 1988) und Schachinger (2001).

7.2.3 Mergesort

Für die in Abschnitt 2.2.7 beschriebene Anzahl Y_n der Schlüsselvergleiche von Mergesort gelten die Entwicklungen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, Y_n &= n \log_2 n + n\varpi_3(\log_2 n) + O(1), \\ \mathrm{Var}(Y_n) &= n\varpi_4(\log_2 n) + o(n), \end{aligned}$$

wobei ϖ_3, ϖ_4 stetige Funktionen mit Periode 1 sind, ϖ_4 strikt positiv ist, jedoch ϖ_3 nicht differenzierbar ist. Es gilt

$$\varpi_3(u) = C + \frac{1}{\log 2} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1 + \Psi(\chi_k)}{\chi_k(\chi_k + 1)} e^{2k\pi i u}, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{34}$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$, einer komplexen Funktion Ψ, die $O(1)$ auf der imaginären Achse $\Re(s) = 0$ ist und

$$\chi_k = \frac{2\pi i k}{\log 2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

vgl. Flajolet and Golin (1994), wo auch ein zentraler Grenzwertsatz für Y_n gezeigt wird. Obwohl ϖ_3 nicht differenzierbar ist, kann Korollar 7.5 mit

$$f(n) = n \log_2(n) + n\varpi_3(\log_2 n), \quad g(n) = n\varpi_4(\log_2 n)$$

dennoch angewandt werden. Dazu kann die spezielle Gestalt von ϖ_3 in (34) ausgenutzt werden, vgl. Neininger und Rüschendorf (2004a, Seiten 408-409).

7.2.4 Maxima in rechtwinkligen Dreiecken

Die in Abschnitt 2.2.9 beschriebene Anzahl Y_n der Maxima einer zufälligen Punktmenge eines rechtwinkligen Dreiecks erfüllt

$$\mathbb{E}\, Y_n = \sqrt{\pi}\sqrt{n} + O(1), \quad \mathrm{Var}(Y_n) = \sigma^2 \sqrt{n} + O(1)$$

mit $\sigma^2 = (2\log 2 - 1)\sqrt{\pi}$, vgl. Bai et al. (2001). Den dort mit der Momentenmethode bewiesenen zentralen Grenzwertsatz kann man nun auch alternativ durch Verifizieren der Bedingungen in Korollar 7.5 erhalten, vgl. Neininger und Rüschendorf (2004a, Seiten 410–411).

7.2.5 Bewertungen zufälliger Binärsuchbäume

Die in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen Bewertungen zufälliger Binärsuchbäume konnten in Abschnitt 4.2.2 für Tollterme b_n mit $\mathbb{E}\, b_n = n^\alpha L(n) + o(n^\alpha L(n))$, $\alpha > 1/2$ und L langsam variierend bei Unendlich unter Verwendung der ℓ_2 Metrik behandelt werden. Für kleinere Tollterme mit $\mathbb{E}\, b_n = O(\sqrt{n})$ wird man auf die Fixpunktgleichung (21) mit den in Abschnitt 5 beschriebenen Problemen geführt. Es stellt sich heraus, dass für derartige Tollterme Erwartungswert und Varianz von Y_n asymptotisch linear sind mit Fehlertermen, die es erlauben, Korollar 7.5 anzuwenden. Dies führt auf asymptotische Normalität der skalierten Y_n, vgl. Hwang und Neininger (2002). Ein alternativer Zugang zur asymptotischen Normalität über die Steinsche Methode findet sich in Devroye (2002/03).

7.2.6 Größe kritischer Galton Watson Bäume

Die in Abschnitt 4.2.5 offen gebliebenen Fälle der Größe kritischer Galton Watson Bäume (bedingt auf Überleben der n-ten Generation) bei Offspring Verteilungen, die im Anziehungsbereich einer α-stabilen Verteilung mit $1 < \alpha < 2$ liegen, können mit einer Variante der Rekursionsgleichung (1) angegangen werden, vgl. Abschnitt 2.2.10. Dies führt auf die Fixpunktgleichung

$$X \stackrel{d}{=} U^{1/(\alpha-1)} \sum_{r=1}^{K} X^{(r)} \tag{35}$$

mit U gleichverteilt auf $[0,1]$ und einem von U unabhängigen, zufälligen, jedoch nur von α abhängenden K, das insbesondere $\mathbb{E}\, K = \alpha/(\alpha-1)$ erfüllt. Die hier relevante Grenzverteilung hat endliche Momente für Ordnungen kleiner α, jedoch kein endliches Moment von der Ordnung α. Andererseits liefert die Fixpunktgleichung (35) für jedes $1 < s < \alpha$ eine Kontraktion auf $(\mathcal{M}_s^1(1), \zeta_s)$, da die Lipschitzkonstante hier beschränkt ist durch

$$\mathbb{E}\,[KU^{s/(\alpha-1)}] = \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{\alpha-1}{s+\alpha-1} < 1.$$

Eine Verallgemeinerung von Satz 7.3 auf Varianten von Rekursion (1) mit zufälligem, von n abhängendem K wurde in Neininger und Rüschendorf (2004a, Abschnitt 4.3) im Hinblick auf diese Anwendung bereitgestellt. Für die Verifikation der (25)–(27) entsprechenden Bedingungen und weitere Details des Zugangs siehe Kauffmann (2003, Abschnitt 3.2).

7.2.7 Profil zufälliger Binärsuchbäume

Für das in Abschnitt 2.2.12 beschriebene Profil $Y_{n,k}$ zufälliger Binärsuchbäume gilt für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}\, Y_{n,k} = \frac{2^k}{n!} s(n,k) = \frac{(2\log n)^k}{\Gamma(k/\log n) k! n}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right), \tag{36}$$

wobei $s(n,k)$ die (vorzeichenlosen) Stirling Zahlen erster Art bezeichnen. Für $k = \alpha \log n + o(\log n)$ liefert dies

$$\frac{\log \mathbb{E}\, Y_{n,k}}{\log n} \to \lambda(\alpha) = \alpha - 1 - \alpha \log(\alpha/2).$$

Es ist bekannt, dass das Sättigungslevel und die Höhe des zufälligen Binärsuchbaums bei $\alpha_- \log n$ bzw. $\alpha_+ \log n$ liegen, vgl. Devroye (1986, 1987), wobei $0 < \alpha_- < 2 < \alpha_+$ die Lösungen der Gleichung

$$\alpha \log\left(\frac{2e}{\alpha}\right) = 1, \quad \alpha_- \doteq 0.373, \quad \alpha_+ \doteq 4.311$$

sind. Deshalb zeigt das Profil $Y_{n,k}$ asymptotisch nichtdeterministisches Verhalten für $k = \alpha \log n + o(\log n)$ mit $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$.

Der Zugang der Kontraktionsmethode lässt sich nach wie vor anwenden. Aus der Asymptotik (36) lässt sich für die skalierten Größen $Y_{n,k}/\mathbb{E}\, Y_{n,k}$ mit $k = \alpha \log n + o(\log n)$, $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$ die Limesgleichung

$$X_\alpha \stackrel{d}{=} \frac{\alpha}{2} U^{\alpha-1} X_\alpha^{(1)} + \frac{\alpha}{2}(1-U)^{\alpha-1} X_\alpha^{(2)} \tag{37}$$

erhalten, wobei U gleichverteilt auf $[0,1]$ ist.

Diese Gleichung hat eine eindeutige Lösung $\mathcal{L}(X_\alpha)$ im Raum $\mathcal{M}_s^1(1)$, wobei $1 < s < \varrho$ und $\varrho = \varrho(\alpha)$ gegeben ist durch $(\alpha - 1)\varrho + 1 = 2(\alpha/2)^\varrho$ für $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+) \setminus [1,2]$ und $\varrho = \infty$ für $\alpha \in [1,2]$. Insbesondere gilt $\varrho < 2$ für $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+) \setminus [2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$.

Die Verteilung $\mathcal{L}(X_\alpha)$ hat Momente aller Ordnungen kleiner als ϱ, aber kein endliches Moment der Ordnung ϱ für $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+) \setminus [1,2]$. Diese Eigenschaften legen den Bereich der Anwendbarkeit verschiedener Methoden fest. Die Momentenmethode kann nur im Bereich $\alpha \in [1,2]$ angewendet werden. Das L_2 Setting deckt den größeren Teilbereich $\alpha \in [2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$ ab. Mit den Abschnitt 7.1 zugrundeliegenden Methoden kann der gesamte Bereich $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$ universell behandelt werden. Für Details und verfeinerte Resultate im Falle $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$ vgl. Fuchs, Hwang und Neininger (2004), für einen Zugang über Martingale Chauvin, Drmota und Jabbour-Hattab (2001).

8 Degenerierte Fixpunktgleichungen

Wir kommen nun zur Behandlung von Rekursionen, die auf degenerierte Fixpunktgleichungen (22) führen. Dies ist ein Phänomen, dass weit über die in Abschnitt 5 skizzierten Fälle mit langsam variierender Varianz hinausgeht und in Beispielen auf verschiedene Grenzverteilungen führt. Das hier vorgestellte Resultat aus Neininger und Rüschendorf (2004b) behandelt universell Fälle vom in Abschnitt 5 beschriebenen Typus, die auf asymptotische Normalität führen.

8.1 Ein allgemeiner zentraler Grenzwertsatz

Wir betrachten Rekursion (1) für (Y_n) mit $d = 1$, $K = 1$ und $A_1(n) = 1$,

$$Y_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y_{I_n} + b_n, \quad n \geq n_0, \tag{38}$$

wobei wir $I_n = I_1^{(n)}$ schreiben und $\mathbb{P}(I_n = n) < 1$ für $n \geq n_0$ annehmen.

Wir bezeichnen $\sigma_n = \sqrt{\mathrm{Var}(Y_n)}$ und $\mu_n = \mathbb{E}\, Y_n$, und schreiben $\log^\alpha n := (\log n)^\alpha$ für $\alpha > 0$ und $n \geq 1$. Dann lässt sich der folgende zentrale Grenzwertsatz beweisen (Neininger und Rüschendorf (2004b, Theorem 2.1)).

Satz 8.1 *Die Folge $(Y_n)_{n\geq 0}$ erfülle (38) mit $\|Y_n\|_3 < \infty$ für alle $n \geq 0$ und*

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E} \log\left(\frac{I_n \vee 1}{n}\right) < 0, \quad \sup_{n\geq 1} \left\|\log\left(\frac{I_n \vee 1}{n}\right)\right\|_3 < \infty. \tag{39}$$

Ferner gebe es Zahlen α, λ, κ mit $0 \leq \lambda < 2\alpha$, so dass Erwartungswert und Varianz von Y_n die Entwicklungen

$$\|b_n - \mu_n + \mu_{I_n}\|_3 = O\left(\log^\kappa n\right) \quad \text{und} \quad \sigma_n^2 = \sigma^2 \log^{2\alpha} n + O(\log^\lambda n) \tag{40}$$

mit einer Konstanten $\sigma > 0$ erfüllen. Falls

$$\beta := \tfrac{3}{2} \wedge 3(\alpha - \kappa) \wedge 3(\alpha - \lambda/2) \wedge (\alpha - \kappa + 1) > 1,$$

so

$$\frac{Y_n - \mathbb{E}\, Y_n}{\sigma \log^\alpha n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1),$$

mit Konvergenzrate in der Zolotarev Metrik

$$\zeta_3\left(\frac{Y_n - \mathbb{E}\, Y_n}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_n)}}, \mathcal{N}(0,1)\right) = O\left(\frac{1}{\log^{\beta-1} n}\right).$$

Die erste der Bedingungen in (39) bedeutet, dass I_n nicht zu groß, die zweite, dass I_n nicht zu klein sein darf.

Die Verwendung der Zolotarev Metrik ist wesentlich im Beweis dieses Satzes, da nicht nur allgemeine Eigenschaften der Metrik, etwa dass ζ_3 eine $(3,+)$ ideale Wahrscheinlichkeitsmetrik ist, benutzt werden, sondern auf die spezielle Definition in (23) zurückgegriffen wird. Insbesondere muss mit Taylorentwicklungen der Funktionen der Klasse $\mathcal{F}_3$ gearbeitet werden, um hinreichend scharfe Abschätzungen zu erhalten.

Eine Verallgemeinerung von Satz 8.1 auf Rekursionsgleichungen (1) mit $K \geq 2$ findet sich in Neininger und Rüschendorf (2004b, Abschnitt 5).

8.2 Anwendungen

Wir diskutieren einige Anwendungen von Satz 8.1, bei denen die asymptotische Normalität direkt aus den Bedingungen an die Momente in (40) folgt.

8.2.1 Tiefe von Knoten in zufälligen Binärsuchbäumen

Für die in Abschnitt 2.2.3 beschriebene Tiefe Y_n eines zufälligen Knotens in einem zufälligen Binärsuchbaum mit n internen Knoten gilt

$$\mathbb{E}\, Y_n = 2\log n + O(1), \quad \mathrm{Var}(Y_n) = 2\log n + O(1),$$

vgl. Mahmoud (1992). In der Notation von Satz 8.1 erhalten wir

$$\|b_n - \mu_n + \mu_{I_n}\|_3 = \|2\log(I_n/n) + O(1)\|_3 = O(1).$$

Damit sind die Parameter in Satz 8.1 gegeben als $\alpha = 1/2$, $\kappa = \lambda = 0$ und wir erhalten $\beta = 3/2$. Die technischen Bedingungen in (39) sind erfüllt, da $\log((I_n \vee 1)/n) \to \log\sqrt{U}$ in L_3 für eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable U. Satz 8.1 liefert den zentralen Grenzwertsatz mit einer Konvergenzrate, deren Optimalität in Mahmoud und Neininger (2003, Theorem 1) gezeigt wurde. Für einen elementarstochastischen Zugang zur asymptotischen Normalität in diesem Beispiel vgl. Devroye (1988).

8.2.2 Broadcast Communication Modelle

Für die in Abschnitt 2.2.11 beschriebene Zeit von Algorithmus B zum Auffinden von Maxima in Broadcast Communication Modellen haben Chen und Hwang (2003)

$$\mathbb{E}\, Y_n = \mu\log^2 n + O(\log n), \quad \mathrm{Var}(Y_n) = \sigma^2\log^3 n + O(\log^2 n)$$

mit positiven Konstanten μ und σ sowie einen zentraler Grenzwertsatz gezeigt. Eine direkte Rechnung liefert

$$\|b_n - \mu_n + \mu_{I_n}\|_3 = O(\log n).$$

Wir haben also in Satz 8.1 die Parameter $\alpha = 3/2$, $\kappa = 1$, und $\lambda = 2$, d.h. $\beta = 3/2$. Es folgt damit direkt die asymptotische Normalität.

Für die Anzahl der Schlüsselvergleiche des alternativen Algorithmus A ist der Erwartungswert asymptotisch linear, es gilt (Chen und Hwang (2003))

$$\mathbb{E}\, Y_n = n + \bar{\mu} \ln n + O(1), \quad \mathrm{Var}(Y_n) = \bar{\sigma}^2 \ln n + O(1),$$

mit explizit bekannten Konstanten $\bar{\mu}, \bar{\sigma} > 0$. Eine Verallgemeinerung von Satz 8.1 ist auf diese Rekursion anwendbar. Führende lineare Terme heben sich hier gegenseitig auf und wir erhalten

$$\begin{aligned} \|b_n - \mu_n + \mu_{I_1^{(n)}} + \mu_{I_2^{(n)}}\|_3 &= \|\bar{\mu} \ln((I_1^{(n)} \vee 1)/n) + I_2^{(n)} + \bar{\mu} \ln I_2^{(n)} + O(1)\|_3 \\ &= O(1). \end{aligned}$$

Dies liefert $\alpha = 1/2$ und $\kappa = \lambda = 0$, also $\beta = 3/2$. Wir erhalten die asymptotische Normalität aus Chen und Hwang (2003) mit einer zusätzlichen Konvergenzrate.

8.2.3 Weitere Anwendungen

Die Analyse weiterer Parameter der in Abschnitt 8.2.2 besprochenen Algorithmen A und B führt ebenfalls auf degenerierte Fixpunktgleichungen, die mit Satz 8.1 behandelt werden können, vgl. Neininger und Rüschendorf (2004b).

In Mahmoud (2003) werden einseitige Rekursionen auf zufälligen Binärsuchbäumen untersucht, d.h. Größen, die in ihrer rekursiven Formulierung jeweils nur auf einen der Teilbäume der Wurzel zurückgreifen. Mahmoud (2003) demonstriert, wie Satz 8.1 das Problem der asymptotischen Normalität in allen Fällen auf die Berechnung der asymptotischen Entwicklung der ersten beiden Momente reduziert.

In Gnedin, Pitman und Yor (2004) werden Anzahlen von Komponenten regenerativer Kompositionsstrukturen untersucht. Wie in Mahmoud (2003) wird auch hier das Problem der asymptotischen Normalität vermöge Satz 8.1 auf die Berechnung der asymptotischen Entwicklungen der ersten beiden Momente reduziert.

9 Verwandte Fragen

In diesem Abschnitt werden einige ausgewählte verwandte Fragestellungen angesprochen und mit Hinweisen zur Literatur versehen. Dabei spielt jeweils das Beispiel der Anzahl der Schlüsselvergleiche von Quicksort aus Abschnitt 2.2.1 eine exemplarische Rolle.

9.1 Konvergenzraten

Sowohl im L_2 Setting aus Abschnitt 4.1 als auch im ζ_s Setting aus Abschnitt 7.1 wurden für das prominente Problem der Anzahl Y_n der Schlüsselvergleich von Quicksort aus Abschnitt 2.2.1 Konvergenzraten abgeschätzt. Fill und Janson (2002) gaben in den minimalen L_p Metriken ℓ_p die Abschätzungen

$$\ell_p\left(\mathcal{L}\left(\frac{Y_n - \mathbb{E}\,Y_n}{n}\right), \mathcal{L}(X)\right) = \begin{cases} O(1/\sqrt{n}), & p \geq 1, \\ \Omega(\log(n)/n), & p \geq 2, \end{cases}$$

und für die Kolmogorov Metrik ϱ

$$\varrho\left(\mathcal{L}\left(\frac{Y_n - \mathbb{E}\,Y_n}{n}\right), \mathcal{L}(X)\right) = \begin{cases} O(n^{-1/2+\varepsilon}), & \varepsilon > 0, \\ \Omega(1/n), & \end{cases}$$

wobei $\mathcal{L}(X)$ der in Abschnitt 4.2.1 beschriebene Fixpunkt ist. In Neininger und Rüschendorf (2002) konnte die Konvergenzordnung für die Zolotarev Metrik ζ_3 identifiziert werden:

$$\zeta_3\left(\mathcal{L}\left(\frac{Y_n - \mathbb{E}\,Y_n}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_n)}}\right), \mathcal{L}(X/\sigma)\right) = \Theta\left(\frac{\log n}{n}\right),$$

mit $\sigma = \sqrt{7 - 2\pi^2/3}$.

Nachdem 1998 die Resultate von Fill und Janson (2002) angekündigt worden waren, wurde allgemein vermutet, dass $\Theta(1/\sqrt{n})$ die korrekte Konvergenzrate in der Kolmogorov Metrik wäre. Im Lichte der Ordnung für die Zolotarev Metrik, die 2001 gefunden wurde, wird nun allgemein $\Theta(\log(n)/n)$ auch für die Kolmogorov Metrik als korrekte Rate vermutet. Unter Spezialisten gilt dieses offene Problem als eines der interessantesten im näheren Umfeld der in dieser Arbeit diskutierten Themen.

9.2 Große Abweichungen

Das Studium großer Abweichungen vom Erwartungswert für Größen vom Typ (1) ist für Anwendungen in der Informatik wichtig, um schlechtes Verhalten von Algorithmen kontrollieren zu können. Die ersten, über Chebychev-Abschätzungen mit Momenten hinausgehenden, Schranken für Abweichungen vom Erwartungswert für die Anzahl der Schlüsselvergleiche von Quicksort finden sich in Rösler (1991). Dort wird mit Induktion aus der modifizierten Rekursionsgleichung (3) eine Schranke für die momenterzeugende Funktion gezeigt. Mit Chernoffs Technik liefert dies dann Abschätzungen für große Abweichungen.

Bessere Schranken konnten in McDiarmid und Hayward (1996) mit einem eher kombinatorischen Zugang, der "Methode der beschränkten Abweichungen", erzielt werden. Diese Schranken konnten dann in Fill und Janson (2002) auch über Röslers Zugang erhalten werden, wozu die Abschätzung der momenterzeugenden Funktion explizit gemacht wurde.

Dieser induktive Zugang führt in Rösler (1991) und Fill und Janson (2002) auf eine gewisse Funktion $f(K, \lambda, n)$, deren benötigte Abschätzung durch mehrfache Differentiation erhalten wird. Interessanterweise führt die Analyse großer Abweichungen der in Abschnitt 2.2.8 beschriebenen worst case Komplexität randomisierter Spielbaum Auswertung auf eine ähnliche Situation. Da dort auch die scharfe Abschätzung involvierter Konstanten eine Rolle spielte und das Problem zweidimensional statt wie bei Quicksort eindimensional ist, lieferten die Abschätzungen über Differentiationen keine befriedigenden Resultate. Für eine Abschätzung des $f(K, \lambda, n)$ entsprechenden Terms erwiesen sich in Ali Khan und Neininger (2002) Beweisideen aus Bennett (1962) als hilfreich.

9.3 Lösungsmenge von Fixpunktgleichungen

Ein mathematisch reizvolles Problem ist die Charakterisierung der Fixpunktmengen der Abbildungen (7) im Raum $\mathcal{M}^d$. Für den Quicksort-Fall aus Abschnitt 4.2.1 ist dies Fill und Janson (2000b) vollständig gelungen. Für allgemeinere Abbildungen vom Typ (7) siehe Holley und Liggett (1981), Durrett und Liggett (1983), Liu (1997, 1998), Alsmeyer und Rösler (2003), Caliebe (2003), Caliebe und Rösler (2003), Biggins und Kyprianou (2003) und die Referenzen in diesen Arbeiten.

9.4 Eigenschaften von Fixpunkten

Das primäre Interesse an Grenzwertsätzen besteht darin, die Verteilungen einer Folge von Zufallsvariablen durch ihren Grenzwert zu approximieren. Bei den in dieser Arbeit diskutierten Grenzwertsätzen (die Normalverteilungsfälle ausgenommen) ist die Grenzverteilung jedoch nur implizit als Fixpunkt einer maßwertigen Abbildung gegeben. Deshalb sind charakterisierende Größen, etwa die Verteilungsfunktion, nicht direkt zugänglich und ein wichtiger Problemkreis besteht darin, Eigenschaften der Fixpunkte zu finden. Für den Fall der Quicksort Grenzverteilung $\mathcal{L}(X)$ aus Abschnitt 4.2.1 wurde in Fill und Janson (2000a) gezeigt, dass X eine beschränkte, beliebig oft stetig differenzierbare Lebesgue-Dichte f_X besitzt, die schnell abfallend ist. Zudem werden dort explizite Schranken für f_X und ihre Ableitungen angegeben. Es ist andererseits etwa nicht bekannt, ob f_X unimodal ist, wenngleich Simulationen dies suggerieren. Ebenso ist offen, ob X unbegrenzt teilbar ist. In Devroye, Fill und Neininger (2000) wurde ein Algorithmus zur gleichmäßigen Approximation von f_X angegeben, der allerdings zu langsam ist, um diese Dichte praktisch zu approximieren. Für analoge Resultate für allgemeinere Fixpunktgleichungen siehe Devroye und Neininger (2002).

9.5 Simulation von Fixpunkten

Zur approximativen Simulation der als Fixpunkte auftretenden Grenzverteilungen kann die Fixpunktgleichung dem Banachschen Fixpunktsatz folgend iteriert werden. Dies liefert Approximationen, die exponentiell schnell in der Anzahl der Iterationen gegen die Lösung konvergieren. Ist in (7) jedoch $K \geq 2$, so ist auch die Komplexität exponentiell in der Anzahl der Iterationen.

In den letzten Jahren ist das Interesse an der exakten Simulation von Verteilungen gestiegen, insbesondere im Zusammenhang mit Gleichgewichtsverteilungen von Markov Ketten. Für das Beispiel der Quicksort Grenzverteilung aus Abschnitt 4.2.1 kann mit dem Algorithmus aus Devroye, Fill und Neininger (2000) exakt simuliert werden. Dieser Algorithmus beruht auf von Neumanns "rejection sampling". Für die exakte Simulation von mit dem Auswahlalgorithmus Find zusammenhängenden "Perpetuities" vgl. Devroye (2001); für die exakte Simulation einer größeren Klasse von Fixpunkten, die insbesondere die Grenzverteilungen der internen Pfadlängen einer Reihe von Splitbäumen beinhaltet, vgl. Devroye und Neininger (2002).

9.6 Rekursionen mit Maxima statt Summen

Viele worst case Parameter (Y_n) rekursiver Algorithmen und diskreter rekursiver Strukturen erfüllen Rekursion (1), wobei die dort auftretende Summe über die Kenngrößen der Teilstrukturen ersetzt wird durch ein Maximum,

$$Y_n \stackrel{d}{=} \bigvee_{r=1}^{K} \left(A_r(n) Y^{(r)}_{I_r^{(n)}} + b_r(n) \right), \quad n \geq n_0.$$

Hierbei sind $(A_1(n), \ldots, A_K(n), b_1(n), \ldots, b_K(n), I^{(n)})$, $(Y_n^{(1)}), \ldots, (Y_n^{(K)})$ unabhängig, $b_1(n), \ldots, b_K(n)$ zufällige d-dimensionale Vektoren und alle restlichen Größen wie in (1). Ein erstes Grenzwertresultat im Stile der Sätze 4.2 und 7.3 findet sich in Neininger und Rüschendorf (2004c), wo mit minimalen L_p Metriken ℓ_p gearbeitet wird. Damit zusammenhängende Fragen bezüglich des Raums möglicher entsprechender Fixpunkte werden in Jagers und Rösler (2003) diskutiert.

Literatur

Ali Khan, T. und Neininger, R. (2004) Probabilistic analysis for randomized game tree evaluation. *Mathematics and Computer Science III (Vienna 2004)*, 163-174, Trends in Mathematics, *Birkhäuser, Basel.*

Alonso, L., Chassaing, P., Gillet, F., Janson, S., Reingold, E. M. und Schott, R. (2004) Sorting with unreliable comparisons: a probabilistic analysis. *Combin. Probab. Comput.* **13**, 419-449.

Alsmeyer, G. und Rösler, U. (2003) A stochastic fixed point equation related to weighed branching with deterministic weights. Preprint.

Bai, Z.-D., Hwang, H.-K., Liang, W.-Q. und Tsai, T.-H. (2001) Limit theorems for the number of maxima in random samples from planar regions. *Electron. J. Probab.* **6**, no. 3, 41 Seiten.

Bai, Z.-D., Hwang, H.-K. und Tsai, T.-H. (2003) Berry-Esseen bounds for the number of maxima in planar regions, *Electron. J. Probab.* **8**, no. 9, 26 Seiten.

Barbour, A. D., Holst, L. und Janson, S. (1992) Poisson approximation. Oxford Studies in Probability, 2. Oxford Science Publications. *The Clarendon Press, Oxford University Press, New York*.

Bennett, G. (1962) Probability inequalities for the sum of independent random variabels *J. Amer. Statist. Assoc.* **57**, 33–45.

Bickel, P. J. und Freedman, P. A. (1981) Some asymptotic theory for the bootstrap. *Ann. Statist.* **9**, 1196–1217.

Biggins, J. D. und Kyprianou, A. E. (2003) The smoothing transform: the boundary case. Preprint.

Burton, R. M. und Rösler, U. (1995) An L_2 convergence theorem for random affine mappings. *J. Appl. Probab.* **32**, 183–192.

Caliebe, A. (2003) Symmetric fixed points od a smoothing transformation. *Adv. Appl. Probab.* **35**, 377–394.

Caliebe, A. und Rösler, U. (2003) Fixed points with finite variance of a smoothing transformation. *Stoch. Proc. Appl.* **107**, 105–129.

Chauvin, B., Drmota, M. und Jabbour-Hattab, J. (2001) The profile of binary search trees. *Ann. Appl. Probab.* **11**, 1042–1062.

Chauvin, B. und Pouyanne, N. (2004) m-ary search trees when $m \geq 27$: a strong asymptotics for the space requirements. *Random Structures Algorithms* **24**, 133–154.

Chauvin, B. und Rouault, A. (2004) Connecting Yule process, bisection and binary search tree via martingales. *Journal of the Iranian Statistical Society* **3**, 89–108.

Chen, W.-M. und Hwang, H.-K. (2003) Analysis in distribution of two randomized algorithms for finding the maximum in a broadcast communication model. *Journal of Algorithms* **46**, 140-177.

Chen, W.-M., Hwang, H.-K. and Chen, G.-H. (1999). The cost distribution of queue-mergesort, optimal mergesorts, and power-of-2 rules. *J. Algorithms* **30**, 423–448.

Chern, H.-H. und Hwang, H.-K. (2001a) Transitional behaviors of the average cost of quicksort with median-of-(2t+1). *Algorithmica* **29**, 44-69.

Chern, H.-H. und Hwang, H.-K. (2001b) Phase changes in random m-ary search trees and generalized quicksort. *Random Structures Algorithms* **19**, 316–358.

Chern, H.-H., Hwang, H.-K. und Tsai, T.-H. (2002) An asymptotic theory for Cauchy-Euler differential equations with applications to the analysis of algorithms. *J. Algorithms* **44**, 177-225.

Cormen, T. H., Leiserson, C. E. und Rivest, R. L. (1990) *Introduction to Algorithms*, MIT Press.

Cramer, M. (1995) Stochastische Analyse rekursiver Algorithmen mit idealen Metriken. Dissertation, *Universität Freiburg.*

Cramer, M. (1997). Stochastic analysis of the Merge-Sort algorithm. *Random Structures Algorithms* **11**, 81–96.

Cramer, M. und Rüschendorf, L. (1996) Analysis of recursive algorithms by the contraction method. *Athens Conference on Applied Probability and Time Series Analysis*, Athens, Greece, 1995, Ed. by C. C. Heyde et al., Lecture Notes in Statistics **114**, 18-33.

Dall'Aglio, G. (1956). Sugli estremi dei momenti delle funzioni di ripartizione doppia. *Ann. Scuoloa Norm. Sup. Pisa (3) 10*, 35–74.

Devroye, L. (1986) A note on the height of binary search trees. *J. Assoc. Comput. Mach.* **33**, 489–498.

Devroye, L. (1987) Branching processes in the analysis of the heights of trees. *Acta Inform.* **24**, 277–298.

Devroye, L. (1988) Applications of the theory of records in the study of random trees. *Acta Inform.* **26** (1988), 123–130.

Devroye, L. (1991) Limit laws for local counters in random binary search trees. *Random Structures Algorithms* **2**, 303–315.

Devroye, L. (1992) A limit theory for random skip lists. *Ann. Appl. Probab.* **2**, 597–609.

Devroye, L. (1999) Universal limit laws for depths in random trees. *SIAM J. Comput.* **28**, 409–432.

Devroye, L. (2001) Simulating perpetuities. *Methodology Comput. Appl. Prob.* **3**, 97–115.

Devroye, L. (2002/03) Limit laws for sums of functions of subtrees of random binary search trees. *SIAM J. Comput.* **32**, 152–171.

Devroye, L., Fill, J. A. und Neininger, R. (2000) Perfect simulation from the Quicksort limit idstribution. *Electron. Commun. Probab.* **5**, 95–99.

Devroye, L. und Neininger, R. (2002) Density approximation and exact simulation of random variables that are solutions of fixed-point equations. *Adv. Appl. Probab.* **34**, 441–468.

Devroye, L. und Neininger, R. (2004) Distances and finger search in random binary search trees. *SIAM J. Comput.* **33**, 647–658.

Dobrynin, A. A., Entringer, R. und Gutman, I. (2001) Wiener index of trees: Theory and applications. *Acta Appl. Math.* **66**, 211–249.

Drmota, M. (1997) Systems of functional equations. *Random Structures Algorithms* **10**, 103–124.

Drmota, M. und Hwang, H.-K. (2004) Bimodality and phase transition in the profile variance of random binary search trees. *SIAM J. Discrete Math.*, erscheint.

Durrett, R. (2002) *Probability models for DNA sequence evolution*, Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York.

Durrett, R. und Liggett, T. M. (1983) Fixed points of the smoothing transformation. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **64**, 275–301.

Fill, J. A. und Janson, S. (2000a) Smoothness and decay properties of the limiting quicksort density function. *Mathematics and computer science (Versailles, 2000)*, 53–64, Trends Math., *Birkhäuser, Basel*.

Fill, J. A. und Janson, S. (2000b) A characterization of the set of fixed points of the Quicksort transformation. *Electron. Comm. Probab.* **5**, 77–84.

Fill, J. A. und Janson, S. (2002) Quicksort asymptotics. *J. Algorithms* **44**, 4–28.

Fill, J. A. und Kapur, N. (2004a) Limiting Distributions for Additive Functionals on Catalan Trees. *Theoret. Comput. Sci.*, erscheint.

Fill, J. A. und Kapur, N. (2004b) The Space Requirement of m-ary Search Trees: Distributional Asymptotics for $m \geq 27$. *Proceedings of the 7th Iranian Statistical Conference*, erscheint.

Fill, J. A., Mahmoud, H. M. und Szpankowski, W. (1996) On the distribution for the duration of a randomized leader election algorithm. *Ann. Appl. Probab.* **6**, 1260–1283.

Flajolet, P. und Golin, M. (1994). Mellin transforms and asymptotics. The mergesort recurrence. *Acta Inform. 31*, 673–696.

Flajolet, P., Gourdon, X. und Martínez, C. (1997) Patterns in random binary search trees. *Random Structures Algorithms*, **11**, 223–244.

Flajolet, P., Labelle, G., Laforest, L., und Salvy, B. (1995) Hypergeometrics and the cost structure of quadtrees. *Random Structures Algorithms*, **7**, 117–144.

Flajolet, P. and Odlyzko, A. (1982) The average height of binary trees and other simple trees. *J. Comput. System Sci.*, **25**, 171–213.

Flajolet, P. and Odlyzko, A. (1990) Singularity analysis of generating functions. *SIAM J. Discrete Math.*, **3**, 216–240.

Fuchs, M., Hwang, H.-K. und Neininger, R. (2004) Profiles of random trees: Limit theorems for random recursive trees and random binary search trees. Preprint.

Geiger, J. (2000) A new proof of Yaglom's exponential limit law. *Mathematics and computer science (Versailles, 2000)*, 245–249, Trends Math., *Birkhäuser, Basel.*

Gnedin, A., Pitman, J., and Yor, M. (2004) Asymptotic laws for the regenerative compositions: Gamma subordinators and the like. Preprint, `http://front.math.ucdavis.edu/math.PR/0408071`.

Gonnet, G. H. und Baeza-Yates, R. (1991) *Handbook of Algorithms and Data Structures*, Addison-Wesley, Workingham.

Grübel, R. und Rösler, U. (1996) Asymptotic distribution theory for Hoare's selection algorithm, *Adv. in Appl. Probab.* **28**, 252–269.

Gutman, I. und Polanski, O. E. (1986) Mathematical Concepts in Organic Chemistry, Springer, Berlin.

Hennequin, P. (1989) Combinatorial analysis of quicksort algorithm. *RAIRO Inform. Théor. Appl.* **23**, 317–333.

Hennequin, P. (1991) *Analyse en moyenne d'algorithme, tri rapide et arbres de recherche*, Ph.D. Thesis, *École Polytechnique.*

Hoare, C. A. R. (1962) Quicksort. *Comput. J.*, **5**, 10–15.

Holley, R. und Liggett, T. M. (1981) Generalized potlatch and smoothing processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **55**, 165–195.

Hwang, H.-K. (1996). Asymptotic expansions of the mergesort recurrences. *Acta Inform. 35*, 911–919.

Hwang, H.-K. (1998). Limit theorems for mergesort. *Random Structures Algorithms 8*, 319–336.

Hwang, H.-K. (2003) Second phase changes in random m-ary search trees and generalized quicksort: convergence rates. *Ann. Probab.* **31**, 609–629.

Hwang, H.-K. und Neininger, R. (2002) Phase change of limit laws in the quicksort recurrence under varying toll functions. *SIAM J. Comput.* **31**, 1687-1722.

Hwang, H.-K. und Tsai, T.-H. (2002) Quickselect and Dickman function, *Combin. Probab. Comput.* **11**, 353–371.

Jacquet, P. and M. Régnier (1986). Normal limiting distribution of the size and the external path length of tries. Technical report INRIA-Rocquencourt, RR-0827.

Jacquet, P. and M. Régnier (1988). Normal limiting distribution of the size of tries. *Performance '87 (Brussels, 1987)*, 209–223. North-Holland, Amsterdam.

Jagers, P. und Rösler, U. (2003) Stochastic fixed points involving the maximum. Preprint.

Janson, S. (2002) Ideals in a forest, one-way infinite binary trees and the contraction method. *Mathematics and computer science, II (Versailles, 2002)*, 393–414, Trends Math., *Birkhäuser, Basel.*

Janson, S. (2003) The Wiener index of simply generated random trees. *Random Structures Algorithms* **22**, 337–358.

Janson, S., Łuczak, T., and Ruciński, A. (2000) *Random graphs*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. *Wiley-Interscience, New York.*

Karp, R. and Zhang, Y. (1995) Bounded branching process and AND/OR tree evaluation. *Random Structures Algorithms* **7**, 97–116.

Kauffmann, L. (2003) Große Stammbäume. Dissertation, *Universität Frankfurt.*

Knuth, D. E. (1969a) The art of computer programming. Vol. 1: Fundamental algorithms. *Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont.*

Knuth, D. E. (1969b) The art of computer programming. Vol. 2: Seminumerical algorithms. *Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont.*

Knuth, D. E. (1973) The art of computer programming. Volume 3. Sorting and searching. Addison-Wesley Series in Computer Science and Information Processing. *Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont.*

Kodaj, B. und Móri, T. F. (1997), On the number of comparisons in Hoare's algorithm "FIND". *Studia Sci. Math. Hungar.* **33**, 185–207.

Kolchin, V. F. (1986) Random mappings. With a foreword by S. R. S. Varadhan. Translation Series in Mathematics and Engineering. *Optimization Software, Inc., Publications Division, New York.*

Lew, W. and Mahmoud, H. M. (1994). The joint distribution of elastic buckets in multiway search trees. *SIAM J. Comput.* **23**, 1050–1074.

Liu, Q. (1997) Sur une équation fonctionnelle et ses applications: une extension du théorème de Kesten-Stigum concernant des processus de branchement. *Adv. in Appl. Probab.* **29**, 353–373.

Liu, Q. (1998) Fixed points of a generalized smoothing transformation and applications to the branching random walk. *Adv. in Appl. Probab.* **30**, 85–112.

Mahmoud, H. M. (1992) *Evolution of Random Search Trees.* John Wiley & Sons, New York.

Mahmoud, H. M. (2000) *Sorting. A Distribution Theory.* Wiley-Interscience, New York.

Mahmoud, H. M. (2003) One-sided variations on binary search trees. *Ann. Inst. Statist. Math.* **55**, 885–900.

Mahmoud, H. M., Flajolet, P., Jacquet, P. und Régnier, M. (2000) Analytic variations on bucket selection and sorting. *Acta Inform.* **36**, 735–760.

Mahmoud, H. M., Modarres, R. und Smythe, R. T. (1995) Analysis of quickselect: An algorithm for order statistics. *RAIRO Inform. Théor. Appl.* **29**, 255-276.

Mahmoud, H. M. und Neininger, R. (2003) Distribution of distances in random binary search trees. *Ann. Appl. Probab.* **13**, 253–276.

Mahmoud, H. M. und Pittel, B. (1989). Analysis of the space of search trees under the random insertion algorithm. *J. Algorithms* **10**, 52–75.

Mahmoud, H. M. und Smythe, R. T. (1998) Probabilistic analysis of Multiple Quick Select, *Algorithmica* **22**, 569–584.

Major, P. (1978). On the invariance principle for sums of independent identically distributed random variables. *J. Multivariate Anal.* **8**, 487–517.

McDiarmid, C. J. H. und Hayward, R. B. (1996) Large deviations for Quicksort. *J. Algorithms* **21**, 476–507.

Morrison, P. and Morrison P. (1999) Scientists' Bookshelf: 100 or so Books that shaped a Century of Science. *American Scientist* **87**, no. 6 (Nov–Dec issue).

Motwani, R. and Raghavan, P. (1995) *Randomized algorithms.* Cambridge University Press, Cambridge.

Neininger, R. (2001) On a multivariate contraction method for random recursive structures with applications to quicksort. *Random Structures Algorithms* **19**, 498–524.

Neininger R. (2002), The Wiener index of random trees. *Combin. Probab. Comput.* **11**, 587-597.

Neininger, R. und Rüschendorf, L. (2002) Rates of convergence for quicksort. *J. Algorithms* **44**, 52-62.

Neininger, R. und Rüschendorf, L. (2003) Multivariate aspects of the contraction method. Preprint 03-19, Preprintserie des Mathematischen Instituts, *Universität Freiburg.*

Neininger, R. und Rüschendorf, L. (2004a) A general limit theorem for recursive algorithms and combinatorial structures. *Ann. Appl. Probab. 14*, 378–418.

Neininger, R. und Rüschendorf, L. (2004b) On the contraction method with degenerate limit equation. *Ann. Probab. 32*, 2838-2856.

Neininger, R. und Rüschendorf, L. (2004c) Analysis of algorithms by the contraction method: additive and max-recursive sequences. *Interacting Stochastic Systems*, With contributions by numerous experts, *Springer*, erscheint.

Panholzer, A. und Prodinger, H. (2004) Spanning tree size in random binary search trees. *Ann. Appl. Probab.* **14**, 718–733.

Papadakis, T., Munro, J. I. und Poblete, P. (1990) Analysis of the expected search cost in skip lists. *SWAT 90 (Bergen, 1990)*, 160–172, Lecture Notes in Comput. Sci., 447, *Springer, Berlin.*

Pittel, B. (1999) Normal convergence problem? Two moments and a recurrence may be the clues. *Ann. Appl. Probab.* **9**, 1260–1302 (1999).

Prodinger, H. (1993) How to select a loser. *Discrete Math.* **120**, 149–159.

Pugh, W. (1989) Skip lists: a probabilistic alternative to balanced trees. *Algorithms and data structures (Ottawa, ON, 1989)*, 437–449, Lecture Notes in Comput. Sci., 382, *Springer, Berlin.*

Rachev, S. T. (1991) *Probability Metrics and the Stability of Stochastic Models*, John Wiley, New York.

Rachev, S. T. und Rüschendorf, L. (1995) Probability metrics and recursive algorithms. *Adv. Appl. Probab.* **27**, 770–799.

Rachev, S. T. und Rüschendorf, L. (1998). *Mass Transportation Problems. Vol. I: Theory.* Springer-Verlag, New York.

Régnier, M. (1989) A limiting distribution for quicksort. *RAIRO Inform. Théor. Appl.* **23**, 335–343.

Rösler, U. (1991) A limit theorem for "Quicksort," *RAIRO Inform. Théor. Appl.* **25**, 85–100.

Rösler, U. (1992) A fixed point theorem for distributions. *Stochastic Process. Appl.* **42**, 195–214.

Rösler, U. (2001) The analysis of stochastic divide and conquer algorithms. *Algorithmica* **29**, 238–261.

Rösler, U. (2004) Quickselect revisited. *Journal of the Iranian Statistical Society* **3**, 273–300.

Rösler, U. und Rüschendorf, L. (2001) The contraction method for recursive algorithms. *Algorithmica* **29**, 3–33.

Saks, M. and Wigderson, A. (1986) Probabilistic boolean decision trees and the complexity of evaluating game trees. *Proceedings of the 27th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 29–38, Toronto, Ontario.

Schachinger, W. (2001). Asymptotic normality of recursive algorithms via martingale difference arrays. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* **4**, 363–398.

Sedgewick, R. (1980) *Quicksort.* Gurland Publishing, NY.

Slack, R. S. (1968) A branching process with mean one and possibly infinite variance, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **9**, 139–145.

Smythe, R. T. und Mahmoud, H. M. (1995) A survey of recursive trees. *Theory Probab. Math. Statist.* **51**, 1–27 (1996).

Snir, M. (1985) Lower bounds on probabilistic linear decision trees. *Theoret. Comput. Sci. 38*, 69–82.

Szpankowski, W. (2001) *Average case analysis of algorithms on sequences.* With a foreword by Philippe Flajolet. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, *Wiley-Interscience, New York.*

Trinajstić, N. (1992) *Chemical Graph Theory*, CRC Press, Boca Raton, FL.

Yaglom, A. M. (1947) Certain limit theorems of the theory of branching random processes, *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)* **56**, 795–798.

Zolotarev, V. M. (1976). Approximation of the distributions of sums of independent random variables with values in infinite-dimensional spaces. *Theor. Probability Appl. 21*, 721–737.

Zolotarev, V. M. (1977) Ideal metrics in the problem of approximating distributions of sums of independent random variables, *Theory Probab. Appl.* **22**, 433–449.