J.W. Goethe Universität
R. Neininger

SS 2019
Blatt 5

Übungen zur Vorlesung
Zufällige rekursive Strukturen

Aufgabe 17. Die Abbildung $S : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}$ sei gegeben durch

$$\mu \mapsto \mathcal{L}\left(\bigvee_{r=1}^{K}(A_r Z_r + b_r)\right),$$

wobei $Z_1, \dots, Z_K, (A_1, b_1, \dots, A_K, b_K)$ unabhängig sind und $\mathcal{L}(Z_r) = \mu$ für $r = 1, \dots K$. Zeigen Sie: Sind die A_r und b_r L_p-integrierbar für ein $p \geq 1$ und gilt

$$\sum_{r=1}^{K} \mathbb{E}\left[|A_r|^p\right] < 1,$$

so hat die Restriktion $S \llcorner \mathfrak{P}_p$ einen eindeutigen Fixpunkt.

Hinweis: Verwenden Sie die ℓ_p-Metrik. Nützlich ist, dass $|a \vee b - c \vee d|^p \leq |a - c|^p + |b - d|^p$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 18. Sei $(A_1, \dots, A_K, b)$ ein Vektor L_2-integrierbarer Zufallsvariable in $\mathbb{C}$ und

$$T : \mathfrak{P}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{P}^{\mathbb{C}}, \qquad \mu \mapsto \mathcal{L}\left(\sum_{r=1}^{K} A_r Z^{(r)} + b\right)$$

wobei $(A_1, \dots, A_K, b)$, $Z^{(1)}, \dots, Z^{(K)}$ unabhängig sind und die $Z^{(r)}$ Verteilung μ haben für $r = 1, \dots, K$. Zeigen Sie, dass für ein passendes $\iota \in \mathbb{C}$ die Restriktion von T auf $\mathfrak{P}_2^{\mathbb{C}}(\iota)$ einen eindeutigen Fixpunkt hat, falls $\mathbb{E}\sum_{r=1}^{K}|A_r|^2 < 1$.

Was ergibt sich daraus für die Lösbarkeit von

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{r=1}^{b} V_r^{\gamma} X^{(r)}$$

wobei $(V_1, \dots, V_b)$, $X^{(1)}, \dots, X^{(b)}$ unabhängig sind, die komplexen $X^{(r)}$ die Verteilung von X haben, $\gamma \in \mathbb{C}$ und $(V_1, \dots, V_b)$ zufällige Wahrscheinlicheiten sind, d.h. Zufallsvariable mit $0 \leq V_r \leq 1$ and $\sum_{r=1}^{b} V_r = 1$ fast sicher?

Aufgabe 19.

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der Asymptotiken für Erwartungswert und Varianz aus Aufgabe 3 einen zentralen Grenzwertsatz für die Anzahl der Blätter eines zufälligen 2-dimensionalen Quadrantenbaums.

(b) Zeigen Sie für die Anzahl rekursiver Aufrufe R_n von Quickselect beim Auswählen des Minimums in einer uniform permutierten Menge von n Daten, vgl. Aufgabe 4, dass

$$\frac{R_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \quad \text{für } n \to \infty.$$

Aufgabe 20. Auf $(\mathbb{B}, \|\cdot\|) = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ sind für $\beta > 1$ Operatoren

$$\begin{aligned}
&\varphi_\beta : C[0,1] \to C[0,1], \quad \varphi_\beta(f)(t) = \mathbf{1}_{\{t \le 1/\beta\}} f(\beta t) + \mathbf{1}_{\{t > 1/\beta\}} f(1), \\
&\psi_\beta : C[0,1] \to C[0,1], \quad \psi_\beta(f)(t) = \mathbf{1}_{\{t \le 1/\beta\}} f(0) + \mathbf{1}_{\{t > 1/\beta\}} f\left(\frac{\beta t - 1}{\beta - 1}\right).
\end{aligned}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die Abbildung T aus (1.7) mit $K = 2$ und

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \varphi_\beta, \quad A_2 = \sqrt{\frac{\beta - 1}{\beta}} \psi_\beta, \quad b = 0$$

in $\mathfrak{P}_s^{C[0,1]}[\chi]$ mit $2 < s \le 3$ einen eindeutigen Fixpunkt hat, wobei χ das Wiener Maß bezeichnet. Identifizieren Sie diesen Fixpunkt.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $\mathfrak{P}_s^{C[0,1]}[\mathcal{L}(X)]$ für einen Prozess $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ mit $\mathcal{L}(X) \in \mathfrak{P}_s^{C[0,1]}$ der Raum aller Verteilungen von Prozessen $Y = (Y_t)_{t \in [0,1]}$ in $\mathfrak{P}_s^{C[0,1]}$ ist mit

$$\mathbb{E}[X_u] = \mathbb{E}[Y_u], \quad \mathrm{Cov}(X_u, X_v) = \mathrm{Cov}(Y_u, Y_v), \qquad u, v \in [0,1].$$

Zudem ist (nach Satz 1.2.2) das Paar $(\mathfrak{P}_s^{\mathbb{B}}[\nu], \zeta_s)$ für $s > 0$ und $\nu \in \mathfrak{P}_s^{\mathbb{B}}$ ein metrischer Raum für jeden separablen Banachraum $\mathbb{B}$.

Abgabe am Dienstag, den 2. Juni 2019, vor der Vorlesung.