

Übungen zur Vorlesung Zufällige rekursive Strukturen

Aufgabe 5. Seien $0 < p < 1$, U eine $\text{unif}[0, 1]$ verteilte Zufallsvariable sowie $\mu, \nu \in \mathfrak{P}_p$ mit Quantilfunktionen F_μ^{-1} und F_ν^{-1} . Zeigen Sie, dass $(F_\mu^{-1}(U), F_\nu^{-1}(U))$ im Allgemeinen kein optimales ℓ_p -Coupling von μ und ν ist.

Hinweis: Sie können ein Gegenbeispiel konstruieren, wobei μ und ν jeweils zweielementigen Träger haben.

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass $\mu, \nu, \rho \in \mathfrak{P}_p(\mathbb{R}^2)$, $0 < p < \infty$, im Allgemeinen nicht gleichzeitig optimal bezüglich ℓ_p gekoppelt werden können, dass also keine Zufallsvariable W_μ, W_ν, W_ρ existieren, so dass (W_μ, W_ν) , (W_ν, W_ρ) und (W_μ, W_ρ) jeweils optimale ℓ_p -Couplings ihrer Verteilungen sind.

Hinweis: Für ein Gegenbeispiel können Sie $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ als Ecken eines gleichseitigen Dreiecks wählen sowie $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{\mathbf{a}} + \delta_{\mathbf{b}})$, $\nu = \frac{1}{2}(\delta_{\mathbf{a}} + \delta_{\mathbf{c}})$ und $\rho = \frac{1}{2}(\delta_{\mathbf{b}} + \delta_{\mathbf{c}})$.

Aufgabe 7. Sei (M, d) ein kompakter, separabler metrischer Raum und $0 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass $(\mathfrak{P}_p(M), \ell_p)$ ein kompakter metrischer Raum ist, in dem Konvergenz äquivalent zu schwacher Konvergenz ist.

Aufgabe 8. Sei $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$ ein separabler Banach-Raum, $1 \leq p < \infty$, $\mu \in \mathfrak{P}_p(\mathbb{B})$ und $t_{\mathbf{a}} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$, $x \mapsto x + \mathbf{a}$ die Translation um $\mathbf{a} \in \mathbb{B}$. Zeigen Sie für das Bildmaß $t_{\mathbf{a}}(\mu)$, dass

$$\ell_p(\mu, t_{\mathbf{a}}(\mu)) = \|\mathbf{a}\|.$$

Abgabe am Dienstag, den 21. Mai 2019, vor der Vorlesung.