J.W. Goethe Universität
R. Neininger

SS 2019
Blatt 1

Übungen zur Vorlesung
Zufällige rekursive Strukturen

Aufgabe 1. Eine Folge $(X_n)_{n\geq 0}$ reeller Zufallsvariable erfülle $X_0 = 0$ sowie

$$X_n \stackrel{d}{=} X_{I_n} + n, \quad n \geq 1,$$

wobei I_n die Binomialverteilung $B(n, p)$ mit $0 < p < 1$ hat und unabhängig von $X_0, \ldots, X_n$ ist.

(a) Finden Sie eine Reskalierung $Y_n := \frac{X_n}{\sigma_n}$ mit einer passenden Folge $(\sigma_n)_{n\geq 0}$, die zu einer Limesgleichung für Y_n führt, und raten Sie ihre (eindeutige) Lösung.

(b) Die Untersuchung aus Teil (a) suggeriert die Asymptotik $\mathbb{E}[X_n] = (1-p)^{-1}n + o(n)$ für $n \to \infty$ (ohne Beweis). Finden Sie eine feinere (d.h. $\sigma_n = o(n)$) Reskalierung $Y_n := \frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n}$ mit passenden Folgen $(\mu_n)_{n\geq 0}$, $(\sigma_n)_{n\geq 0}$, die auf eine Limesgleichung führt.

(c) Raten Sie die (eindeutige) Lösung der Limesgleichung aus (b). Was suggerieren die Momente der Lösung für die Asymptotiken von $\mathbb{E}[X_n]$ und $\mathrm{Var}(X_n)$.

Aufgabe 2. Es sitzen n Horrorclowns in einem Kreis und spielen russisch Roulette bis sich alle Clowns erschossen haben. Die Trommel des Revolvers werde nach jedem Versuch neu gedreht und gegebenenfalls nachgeladen, so dass wir die Versuche als unabhängig mit "Erfolgswahrscheinlichkeit" $0 < p < 1$ annehmen können. Bringen Sie die Anzahl der nötigen Versuche mit der Rekursion aus Aufgabe 1 in Verbindung. Nutzen Sie dies, um eine alternative Darstellung von X_n als Summe unabhängiger Zufallsvariablen anzugeben. Wenden Sie Grundwissen der Stochastik darauf an, um die Vermutungen aus Aufgabe 1 zu verifizieren.

Aufgabe 3. Stellen Sie eine Verteilungsrekursion auf für die Anzahl B_n der Blätter eines zufälligen 2-dimensionalen Quadrantenbaumes. Die Daten seien unabhängig und identisch uniform auf $[0, 1]^2$ verteilt. Skalieren Sie B_n und bestimmen Sie die Limesgleichung. Sie dürfen benutzen, dass für $n \to \infty$ gilt

$$\mathbb{E}[B_n] = (4\pi^2 - 39)n + o(\sqrt{n}), \qquad \mathrm{Var}(B_n) = \sigma^2 n + o(n)$$

mit einem $\sigma > 0$. Raten Sie eine Lösung der Limesgleichung.

Aufgabe 4. Die Anzahl rekursiver Aufrufe R_n von Quickselect beim Auswählen des Minimums in einer uniform permutierten Menge von n Daten erfüllt $R_0 = R_1 = 0$ sowie

$$R_n \stackrel{d}{=} R_{I_n} + 1, \quad n \geq 2,$$

wobei I_n unabhängig von $R_0, \ldots, R_{n-1}$ ist und uniform verteilt auf $\{0, \ldots n-1\}$. Zeigen (oder glauben) Sie, dass für $n \to \infty$ gilt:

$$\mathbb{E}[R_n] = \log n + O(1), \qquad \mathrm{Var}(R_n) = \log n + O(1).$$

Bestimmen Sie die Limesgleichung für die standardisierte Folge.

Abgabe am Dienstag, den 7. Mai 2019, vor der Vorlesung.