Kapitel 7

Kapitel 7 Entdeckendes Lernen

7.1. Einleitung

7.2. Einteilung

7.2.1. Lernsequenz zum Entdeckenden Lernen

7.2.1.1. Darbietendes und Entdeckendes Lernen

7.2.1.2. Gegenüberstellung der beiden Unterrichtsformen

7.2.1.3. Beispiele

7.2.1.4. Fazit

7.2.2. Methoden zur Satz- und Beweisfindung

1) Induktive Satzfindung
2) Analyse einer geometrischen Konfiguration
3) Lösen eines Konstruktionsproblems
4) Lösen eines Berechnungsproblems

Kapitel 7

7.1. Einleitung

Unter entdeckendem Lernen (oder gelenktem Lernen) versteht man eine von Lehrerin oder Lehrer mehr oder weniger vorstrukturierte Lernsituation, die den Schülerinnen und Schülern Gelegenheiten zur Realisierung von Prozesszielen des Entdeckens geben soll, wie:

- Beispiele generieren und Vermutungen äußern,
- Vermutungen an Beispielen überprüfen,
- Argumentieren und Beweisen
- Fallunterscheidungen durchführen,
- Generalisieren und Analogisieren,
- Neue Fragestellungen formulieren.

7.2. Einteilung

→**Lernsequenzen zum entdeckenden Lernen**

→**Methoden zur Satz- und Beweisfindung**

Kapitel 7

7.2.1. Lernsequenzen zum entdeckenden Lernen

Wir konfrontieren zunächst entdeckendes Lernen mit darbietendem Lernen und bringen anschließend Beispiele für Lernsequenzen zum entdeckenden Lernen.

7.2.1.1. Darbietendes und entdeckendes Lernen:

Ausgangspunkt einer Lernsequenz zum entdeckenden Lernen ist meist ein nicht zu schwieriges Problem, das nach seiner Lösung variiert und / oder verallgemeinert werden kann und den Schülern Gelegenheit bietet, selbst neue Problemstellungen zu formulieren.

Man kann entdeckendes Lernen jedoch auch zur Realisierung von Inhaltszielen einsetzen. → **Zielsetzung des Entdeckenden Lernens:**

Durch Endeckendes Lernen….:

1. … soll ein bestimmtes Inhaltsziel erreicht werden, z.B.: die Kenntnis eines bestimmten Satzes und die Einsicht seiner Allgemeingültigkeit.
2. … soll der Unterricht einen Beitrag zu Prozesszielen leiten, indem er den Schülern Möglichkeiten zu vielfältigen Aktivitäten bieten.
3. … soll Interesse, Motivation sowie Kreativität geweckt und Gefördert werden

Konkurrenzverhältnis

Entdeckendes Lernen ⟷ **Darbietendes Lernen**

→ Eine spezielle Variante des auf ein Inhaltsziel bezogenen entdeckenden Lernens ist das Problemlösende Lernen

Hier wird den Schülern ein inhaltsrelevantes Problem gestellt, das sie mit möglichst wenig Hilfe lösen sollen.

(Genauere Ausführung siehe Kapitel 5)

→ Beim darbietenden Lernen werden den Schülern mathematische Sachverhalte als „Fertigprodukt“ vermittelt.
Ein guter darbietender Unterricht versucht das Inhaltsziel, wie zum Beispiel, die Kenntnis eines Satzes und Einsicht seiner Allgemeingültigkeit möglichst effektiv zu vermitteln.
Dabei ist zu beachten:

- Wahl geeigneter Veranschaulichungsmittel
- Sorgfältige Stufung der Schwierigkeiten

Wichtige Aspekte die zu beachten sind:
Formulierung und Verfolgen eigener Fragestellungen durch die Schüler.

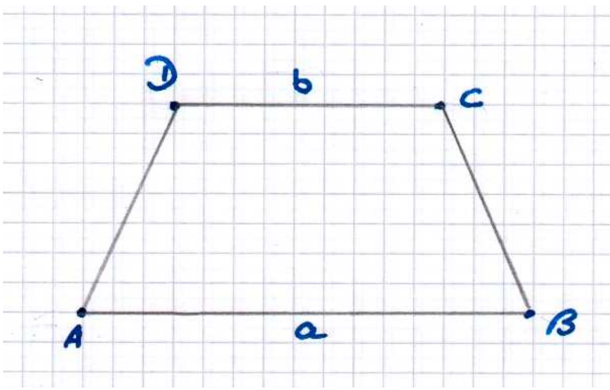
Kapitel 7

Beispiele:

1. Flächeninhaltsberechnung für Trapeze:

Den Schülern seien bereits die Flächeninhaltsformeln für Rechtecke, Parallelogramm und Dreiecke bekannt. Ziel des Unterrichts ist die Flächeninhaltsformel für Trapeze: $A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a + c)$.

Selbstverständlich sollen die Schüler diese Formel nicht nur kennen und anwenden können, sondern die Herleitung der Formel verstanden haben und reproduzieren können.



→ Darbietendes Lernen:
Der Lehrer gibt das Ziel der Stunde bekannt und führt nun eine Herleitung der Formel an der Tafel oder mit dem Tageslichtprojektor durch. Von den verschieden Möglichkeiten hat er diejenige gewählt, von der er glaubt, dass sie am einfachsten zu verstehen ist: Durch Halbdrehung am Mittelpunkt einer der beiden nicht parallelen Seiten entsteht ein Parallelogramm mit dem Flächeninhalt: $A = h \cdot (a + c)$. Also gilt für den Flächeninhalt des Trapezes: $A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a + c)$.

→ Entdeckendes Lernen:
Der Lehrer hat unter Zuhilfenahme von Arbeitsblättern eine Lernsequenz vorbereitet, die es den Schülern ermöglichen soll, aufgrund ihrer bisherigen Kenntnisse ein oder mehrere Verfahren zur Berechnung des Trapezflächeninhaltes aus speziellen Größen zu **entdecken** und anschließend die angestrebte Formel, das Inhaltsziel des Unterrichts, selber herzuleiten. Eine solche Lernsequenz könnte – unter Verzicht auf eine detaillierte Ausarbeitung – extra wie folgt konzipiert sein.

Kapitel 7

7.2.1.2. Gegenüberstellung der beiden Unterrichtsformen:

Entdeckendes Lernen:

Durch die Eigentätigkeit sind die Schüler motiviert und auf die Aufgaben konzentriert. Erfolgserlebnisse wirken positiv. Außerdem ist es wichtig, die Stufung der Lernsequenz an die Lerngruppe anzupassen. Entdeckendes Lernen wird einem Darbietenden Lernen nicht nur deshalb vorgezogen, weil es neben der Realisierung des Inhaltsziels auch zu Prozesszielen einen Beitrag leistet, sondern schon deshalb, weil es ein integriertes Verständnis (Aha-Erlebnis) des Gelernten eher garantiert, als das darbietende Lernen.

→ Das erfolgreiche Durchlaufen der Lernsequenz zum entdeckenden Lernen garantiert Einsicht in die Allgemeingültigkeit des Satzes bzw. der Formel, also ein integriertes im Gegensatz zu einem bloß instrumentellen Verständnis.

→ Trotz dieser Vorteile des entdeckenden Lernens lassen Stoff-Fülle und Zeitnot es nicht zu, den Unterricht durchgängig mit Lernsequenz zum entdeckenden Lernen zu gestallten.

Darbietendes Lernen:

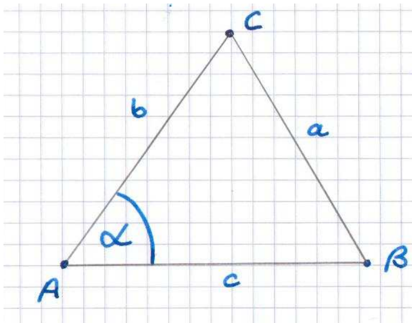
Mathematik, die den Schüler nur als Fertigprodukt – wenn auch in noch so sorgfältiger methodischer Verpackung – serviert wird, motiviert häufig nur zu einem instrumentellen Verständnis (Kenntnis und Handhabung der Formel und Verfahren) Die Herleitung durch den Lehrer interessiert die Schüler meist nicht → ein echtes, integriertes Verständnis bleibt aus.

Hierzu kommt, dass der darbietende Unterricht eines Lehrervortrags dem Lehrer kaum eine Kontrolle für ein integriertes Verständnis (Aha- Erlebnis) auf Seiten des Schülers ermöglicht.

Kapitel 7

7.2.1.3. Weitere Beispiele für die Lernsequenz zum entdeckenden Lernen

1. Kongruenzsätze für Dreiecke



1.1. a) Von einem Dreieck ABC sind bekannt b=8cm, c= 6cm, wie groß sind die dritte Seite und die 3 Winkel?
Löse die Aufgabe durch zeichnen und messen!

→ diese Aufgabe ist unlösbar
b) Begründe warum diese Aufgabe nicht lösbar ist!

1.2. a) Von einem Dreieck ABC sind bekannt c= 8cm, a=6cm, und der Winkel $\alpha = 40°$. Wie groß sind die Seite b und die beiden anderen Winkel?

b) Begründe warum diese Aufgabe nicht lösbar ist!
…usw.

Im Anschluss an diese Unterrichtsequenz muss noch ein Aspektwechsel vollzogen werden, der zur Formulierung der Kongruenzsätze in der üblichen Form führt:

Wenn zwei Dreiecke in…. übereinstimmen, dann sind sie kongruent und stimmen auch in den übrigen sich entsprechenden Größen überein.

Kongruenzsätze:
Dreiecke sind kongruent,

- wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen **(sss),**
- wenn sie in einer Seite und den dieser Seite anliegenden Winkeln übereinstimmen **(wsw),**
- wenn sie in zwei Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel übereinstimmen **(sws),**
- wenn sie in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen **(SsW).**

Ein nachträglicher Beweis der Kongruenzsätze erübrigt sich, da ihre Allgemeingültigkeit aufgrund des Weges, auf dem sie gewonnen wurden, bekannt ist.

Wie die vorangegangene Analyse zeigt, ist der Unterrichtsgegenstand Kongruenzsätze besonders gut geeignet, um den Schülern Gelegenheiten zum Klassifizieren, Identifizieren und Formulieren zu geben. Es sei jedoch auch hier betont, dass das entdeckende Lernen keineswegs nur der

Kapitel 7

Förderung von Prozesszielen dient. Vielmehr darf man annehmen, dass es eher als ein überwiegend darbietender Unterricht zu einem adäquaten Verständnis der Kongruenzsätze selber führt.

7.2.1.4. Fazit:

→ Eine Lernsequenz zum entdeckenden Lernen ist eine Sequenz von Teilaufgaben, die folgende Bedingungen erfüllt:

- Sie ist stets auf ein Inhaltsziel hin konzipiert. Dieses braucht den Schülern jedoch erst nach Beendigung der Lernsequenz deutlich werden.
- Sie gibt den Schülern viele Möglichkeiten zur Realisierung von Prozesszielen.
- Jede Teilaufgabe ist eine den Schüler motivierende Problemstellung.
- Die Freiheit ihrer Stufung hängt von der Leistungsfähigkeit der Lerngruppe ab: Jede folgende Aufgabe sollte aufgrund der vorhergehenden Aufgaben gelöst werden können.

7.2.2. Methoden zur Satz- und Beweisfindung:

Wir unterscheiden:

- **Induktive Satzfindung** mit anschließender Lösung eines Beweisproblems.
- Satz – und Beweisfindung durch **Analyse einer geometrischen Konfiguration**.
- Satz – und Beweisfindung durch **Lösen eines Konstruktionsproblems.**
- Satz – und Beweisfindung durch **Lösen eines Berechnungsproblems.**

Kapitel 7

1. Induktive Satzfindung:

Hier sind Satzfindungen und Beweisfindung deutlich voneinander getrennt. Wir unterscheiden deshalb zwei Stufen des Entdeckungsprozesses:

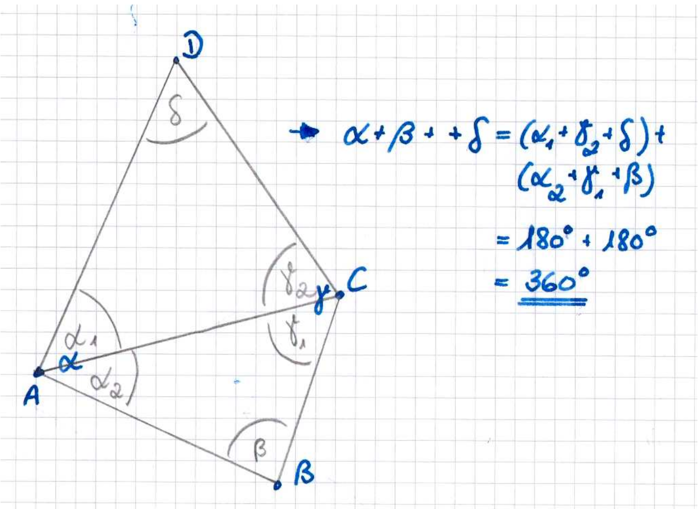
1. Stufe: Durch Zeichnen und Messen entdecken die Schüler den Satz und formulieren ihn als Vermutung.

2. Stufe: Die Schüler sind mit einem Beweisproblem konfrontiert. Sie finden einen Beweis des Satzes und begründen damit seine Gültigkeit.

Beispiel: Winkelsumme im Viereck

<u>1.Stufe: Satzfindung</u>
Der Winkelsummensatz der Dreiecke legt die Frage nahe, ob auch in allen Vierecken die Winkelsumme einen festen Wert hat. Einige wenige Beispiele führen durch Messen und Addieren zu der Vermutung, dass in jedem Viereck die Winkelsumme 360° beträgt.

<u>2.Stufe: Beweisfindung</u>
Die Beweisidee, nämlich die Zerlegung des Vierecks in zwei Teildreiecke kann im Unterrichtsgespräch von den Schülern selber entdeckt werden. Auch die Durchführung kann den Schülern überlassen werden:



Ziele dieser Methode:

- Fähigkeit, Beispiele zu generieren und Vermutungen zu äußern.
- Fähigkeit, eine Vermutung auf Allgemeingültigkeit zu überprüfen.
- Fähigkeit, ein Beweisproblem zu lösen.

Kapitel 7

2. Analyse einer geometrischen Konfiguration

Ausgangspunkt ist eine für die Entdeckung des Satzes geeignete geometrische Konfiguration, die nach Anweisung des Lehrers von den Schülern gezeichnet wird. Die sich anschließende Analyse der Konfiguration führt dann zugleich zur Entdeckung des Satzes und zur Begründung seiner Allgemeingültigkeit. Die Schüleraktivitäten lassen sich daher auch hier zwei Stufen zuordnen:

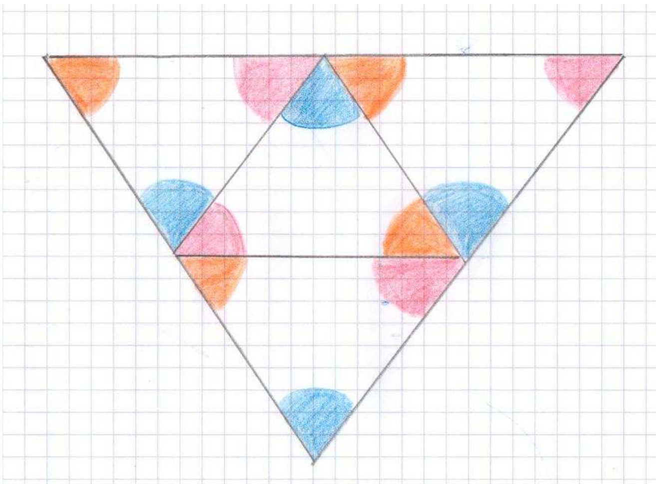
1. Stufe: Die Schüler zeichnen nach Anweisung eine geometrische Konfiguration.

2. Stufe: Die Schüler analysieren die Konfiguration unter einem bestimmten, vom Lehrer vorgegebenen Gesichtspunkt, entdecken den Satz und erkennen zugleich seine Allgemeingültigkeit.

Beispiel: Winkelsummensatz für Dreiecke

1. Stufe Konfiguration:
Zeichne ein Dreieck und die Bilder des Dreiecks bei den Halbdrehungen um die Seitenmitte.

2. Stufe Analyse:
Färbe gleich große Winkel mit derselben Farbe. Entdecke eine Beziehung zwischen den drei Winkeln des Dreiecks und begründe sie mit Hilfe der Eigenschaften der Punktspiegelung.



Ziele dieser Methode:

- Fähigkeit, nach Anweisungen eine Konfiguration zu zeichnen.
- Fähigkeit, Teilkonfigurationen in einer Konfiguration zu entdecken.
- Fähigkeit, bekannte Sätze zur Argumentation heranzuziehen.
- Fähigkeit, einen entdeckten Zusammenhang zu formulieren.
- Fähigkeit, eine Argumentation auf Allgemeingültigkeit zu überprüfen.

Kapitel 7

3. Lösen eines Konstruktionsproblems

Bei dieser Methode wird zunächst ein Konstruktionsproblem gelöst und die Richtigkeit der Konstruktion bewiesen. Durch eine ergänzende Überlegung, zu der von außen (Lehrer, Arbeitsblatt) der Anstoß kommen muss, wird dann der betreffende Satz entdeckt - und zugleich seine Allgemeingültigkeit erkannt. Wir unterscheiden somit wiederum zwei Stufen des Entdeckungsprozesses:

1. Stufe: Die Schüler lösen eine Konstruktionsaufgabe und begründen die Richtigkeit der Konstruktion.

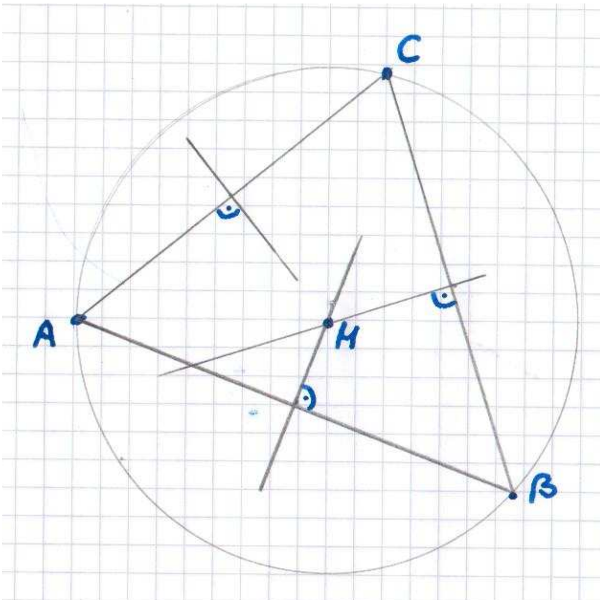
2. Stufe: Durch eine zusätzliche Überlegung wir der Satz entdeckt und zugleich seine Gültigkeit eingesehen.

Beispiel: Mittelsenkrechte im Dreieck

<u>Aufgabe:</u> Konstruiere zu gegebenem Dreieck einen Kreis durch die drei Eckpunkte.

<u>Lösung:</u> Der Kreismittelpunkt M ist Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten.

<u>Ergänzung:</u> Was kann man über die dritte Mittelsenkrechte aussagen?



Ziele dieser Methode:
- Fähigkeit, ein Konstruktionsproblem zu lösen.
- Fähigkeit, die Richtigkeit einer Konstruktion zu begründen.

Kapitel 7

4. Lösen eines Berechnungsproblems

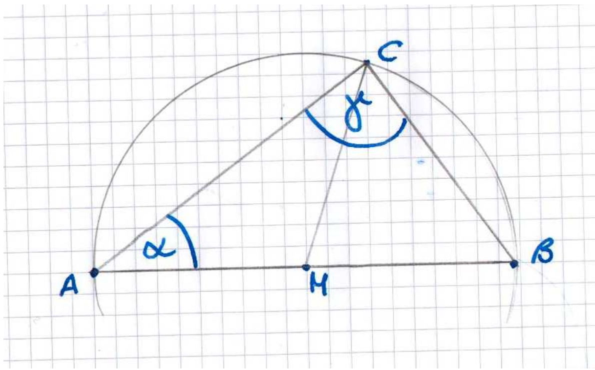
Diese Methode ist für Formeln geeignet und solche Sätze, in denen ein Zusammenhang zwischen Größen ausgesagt wird. Es wird ein Berechnungsproblem gestellt, dessen allgemeine Lösung die Formel bzw. den Satz liefert. Da es zumindest in leistungsschwächeren Klassen zweckmäßig ist, mit einem speziellen Berechnungsproblem zu beginnen, unterscheiden wir auch hier zwei Stufen:

1. Stufe: Die Schüler lösen ein spezielles Berechnungsproblem.

2. Stufe: Die Einführung von Variablen führt zur allgemeinen Lösung und damit zu dem gewünschten Satz.

Beispiel: Thalessatz

Aufgabe: gegeben: α
gesucht: γ



Ziele dieser Methode:

- Fähigkeit, spezielle Berechnungsprobleme zu lösen.
- Fähigkeit, ein spezielles Berechnungsproblem durch Einführung von Variablen zu verallgemeinern und die allgemeine Lösung zu finden.
- Fähigkeit zu Termumformungen.