

Kapitel 2

Kapitel 2 Propädeutische Geometrie in Klasse 5 und 6 (Ebene Geometrie und Raumgeometrie)

2.1. Einführung

2.2. Einteilung Raumgeometrie – Ebene Geometrie

2.2.1. Raumgeometrie

2.2.1.1. Anfänge der Raumgeometrie in der Schule

2.2.1.2. Inhalte

1. Körperformen
2. Körpernetze
3. Rauminhalte

2.2.2. Ebene Geometrie

2.2.2.1. Lerninhalte

2.2.2.2. Überblick

1. Zeichnen und Falten
 2. Geobrett
 3. Tangram
 4. Messen und Berechnen
-

Kapitel 2

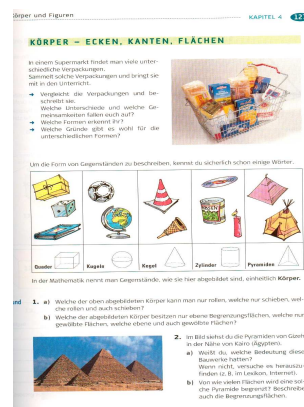
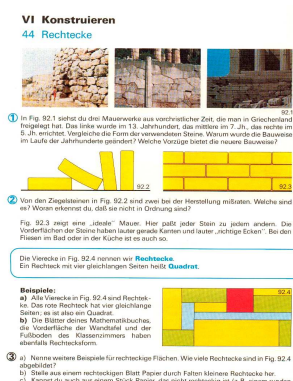
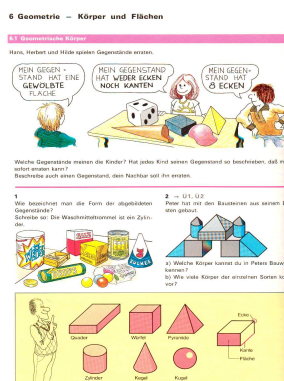
2.1. Einführung

Die propädeutische Geometrie teilt sich in zwei Bereiche die **eben Geometrie** und die **Raumgeometrie**

Womit beginnen - Ebene Geometrie oder Raumgeometrie?

Es gibt verschiedene Auffassungen darüber, ob zuerst mit der ebenen Geometrie oder mit der Raumgeometrie begonnen werden soll. In den Schulbüchern ist das auch ganz verschieden gelöst. Allerdings bringen die Schüler aus den Grundschulen und aus dem täglichen Leben mehr Erfahrungen zur Raumgeometrie als zur Ebenen Geometrie mit.

Beide Auffassungen findet man auch in den Schulbüchern.



Kurs Mathematik 5
Diesterweg

Lambacher Schweizer 5
Klett

Mathematik heute.1
Schroedel (S126)

(S127)

Einstieg mit:
Raumgeometrie – Ebene Geometrie – Raumgeometrie

Für den Beginn mit der Raumgeometrie spricht folgendes:

- Die Welt um uns herum ist dreidimensional.
- Die Grundformen lassen sich in der Umwelt entdecken.
- Die Grundformen sind den Schülern vertraut.
- Das Haptische (Begreifen (!) mit den Händen) ergänzt das Visuelle.
- Der Bau der Grundkörper erfordert und fördert räumliches Vorstellungsvermögen.

Bei einem Beginn mit der ebenen Geometrie hat man dagegen folgende Vorteile:

- In der Raumgeometrie stehen die Begriffe der ebenen Geometrie zur Beschreibung der Körper zur Verfügung.
- Zum Bau von Modellen kann man auf Fähigkeiten aus der ebenen Geometrie zurückgreifen.

Kapitel 2

- Beim Berechnen von Oberflächen stützt man sich auf Flächenberechnungen der ebenen Geometrie.

2.2. Einteilung Raumgeometrie – Ebene Geometrie

2.2.1. Raumgeometrie

2.2.1.1. Anfänge der Raumgeometrie in der Schule:

Einen Zugang zu der Geometrie vom Raume aus eröffnete zuerst Karl von Raumer, der mit seinem Buch "Das ABC der Kristallkunde" (1820) den Grundstein dazu legte. Adolph Diesterweg ("Leitfaden für den ersten Unterricht in der Formen-, Größen- und räumlichen Verbindungslehre, oder Vorübungen zur Geometrie", 1822) und Peters ("Über das Studium der Mathematik auf Gymnasien", 1828) haben die Vorschläge aufgegriffen und die Ideen als Direktoren von Schullehrerseminaren vorangetrieben. Diese Reformvorschläge setzten sich aber amtlich bis Anfang des 20. Jahrhunderts nicht durch.

Meraner Reform 1905 Lehrplanempfehlungen bzw. Vorschläge der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte auf dem Kongress in Meran. Eine unter der Führung von Felix Klein stehende Kommission, welche zu einschlägigen Unterrichtsfragen Vorgaben erarbeitete, legte der Gesellschaft 1905 in Meran ihre Beschlüsse vor.

Diese wurden für gutgeheißen und gelten seit dem als die Meraner Beschlüsse

Zentrale Inhalte der Beschlüsse

Als selbstverständliche Aufgabe wird wie bisher so auch weiterhin dem mathematischen Unterricht die Pflege der logischen Schulung des Geistes zugewiesen.

Weiterhin kommen als wichtigste Aufgaben die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens und die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens hinzu, um so die Fähigkeit zur Mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt zu möglicher Entwicklung zu bringen.

Zitat aus den Beschlüssen

"Einführung in die Grundbegriffe der Raumanschauung, jedoch derart, dass der Raum vorwiegend als Träger planimetrischer Beziehungen erscheint. Raumausdehnungen, Flächen, Linien Punkte zunächst in der Umgebung erläutert und bestätigt an den verschiedensten Körpern. Ebene Figuren zunächst als Teile der Körperbegrenzung, dann als selbstständige Gebilde, an welchen die Begriffe der Richtung, des Winkels, des Parallelismus, der Symmetrie zum Verständnis zu bringen sind. Übung im Gebrauch des Lineals und Zirkels, beständiges Zeichnen und Messen."

Kapitel 2

2.2.1.2. Inhalte:

Einteilung:

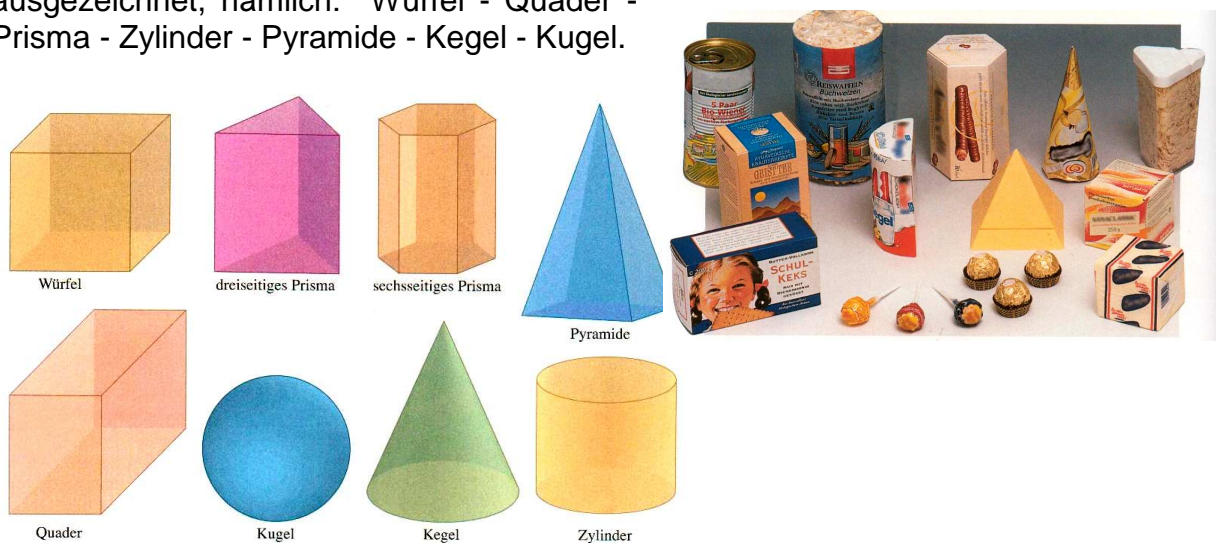
1. **Körperformen**
2. **Körpernetze**
3. **Rauminhalte**

1. Körperformen:

Überblick:

In der Raumgeometrie wird die Umwelt mit "mathematischen Augen" betrachtet. Der Unterricht will dem Schüler helfen, Objekte aus der Umwelt zu beschreiben, zu charakterisieren und zu klassifizieren.

- Traditionell werden in der Raumgeometrie **sieben Grundkörper** ausgezeichnet, nämlich: Würfel - Quader - Prisma - Zylinder - Pyramide - Kegel - Kugel.



- Im Unterricht wird von Objekten ausgegangen, welche nicht künstlich erzeugt werden müssen, sondern in der **Umwelt** vorhanden sind. Sie werden betrachtet und beschrieben.
- Dann werden aber auch **Modelle der Grundkörper** in den Unterricht einbezogen. Sie können als fertige Modelle angefasst, betrachtet und beschrieben werden.
- Darüber hinaus können die Schüler selbst Modelle anfertigen. Dabei erkennen und nutzen sie **Eigenschaften der Körper**.
- Beim Herstellen von Modellen werden die Schüler auf **Körpernetze** geführt. Sie ermöglichen auch die Berechnung von **Oberflächen** der Körper.

Kapitel 2

- Größenvergleiche von Körpern führen schließlich auf die Berechnung von **Rauminhalten** der Körper.

Theorie:

- Die Umwelt beherbergt eine Fülle von Formen. Ziel der Formenkunde soll es sein, die sieben Grundkörper aus dieser Formenfülle zu isolieren und zu charakterisieren. Das Sortieren und Klassifizieren der Körperformen ist eine ernstzunehmende mathematische Tätigkeit, da hier bewusst mit den Tätigkeiten der Begriffsbildung gearbeitet wird.
- Als Grundkörper werden der Würfel, der Quader, das Prisma, der Zylinder, die Pyramide, der Kegel und die Kugel bezeichnet.
- Über diese Einteilung lässt sich diskutieren, da der Würfel ein Quader und der Quader ein Prisma ist. Man könnte also Würfel und Quader als Grundformen weglassen. Aber gerade an diesen Körpern kann die Begriffsbildung trainiert werden. Warum ist jeder Quader ein Prisma aber nicht umgekehrt? Mit solchen Fragen kommt man den Gemeinsamkeiten und den Unterschieden der beiden Begriffe näher.
- Die Begriffe Prisma, Zylinder und Kegel müsste man eigentlich noch weiter präzisieren, da es sich in dieser Jahrgangsstufe nur um gerade Prismen, um gerade Kreiszylinder und um gerade Kreiskegel handelt. Im Anfangsunterricht geht man aber auf solche Unterscheidungen noch ein, da es sich hier um eine erste bewusste Begriffsbildung handelt.
- Die Kugel nimmt in vielerlei Hinsicht eine Sonderstellung ein, da sie sich nur schwer zeichnen lässt und man von ihr kein ebenes Netz erzeugen kann. Sie wird deshalb hier auch nur ganz kurz erwähnt.

Teilgebiete:

- **Darstellungsformen**
- **Schülerzeichnungen**
- **Bau**
- **Dynamik**

Darstellungsformen:

➤ **Verbale Beschreibung**

In manchen Schulbüchern sind die Grundkörper nur in Bildern dargestellt. Andere Bücher greifen auf ein sehr einfaches Vokabular zurück oder beschreiben (definieren) die Körper in vereinfachter Form, wodurch nicht alle Körper einer Klasse erfasst werden. Eine mathematisch vollständige

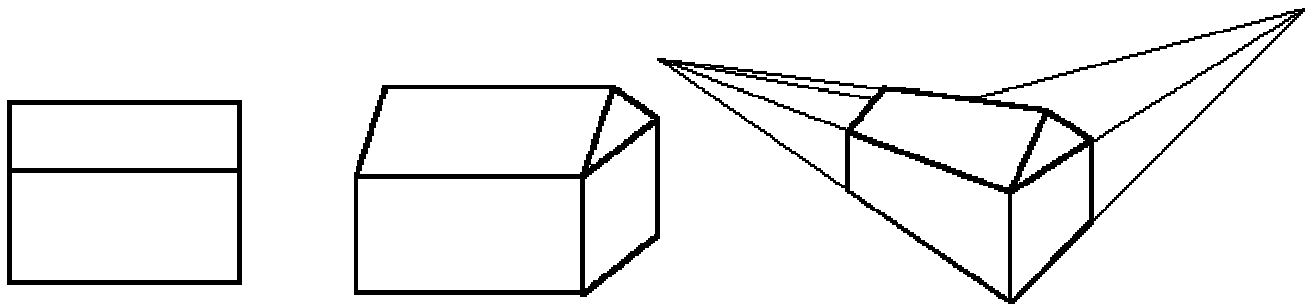
Kapitel 2

Beschreibung der Körper ist in dieser Jahrgangsstufe ja auch noch nicht anzustreben.

Es soll vielmehr versucht werden, über die Verbindung von Bildern und realen Darstellungen die Struktur der Grundkörper zu vermitteln.

➤ Schrägbilder

Das Schrägbild (schräge Parallelprojektion) ist in der Schule als ein Verbindungsglied zwischen Parallelprojektion und Zentralprojektion zu sehen, da es Maßtreue und Anschaulichkeit gleichermaßen anstrebt.



Parallelprojektion

Maßtreue

Schrägbild

Mischung aus Maßtreue
und Anschaulichkeit

Zentralprojektion

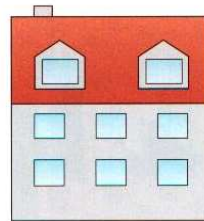
Anschaulichkeit

Beispiel (siehe Mathematik konkret 1 Baden-Württemberg Cornelsen)

Architekten stellen geplante Häuser in Zeichnungen oft in Vorder- und Seitenansicht dar. Mithilfe eines **Schrägbildes** kann man sich das ganze Haus besser vorstellen.



Vorderansicht



Seitenansicht



Schrägbild

Beim Zeichnen von Schrägbildern werden Strecken, die nach „hinten“ verlaufen, **um die Hälfte verkürzt** gezeichnet. Diese Strecken werden **entlang der Kästchendiagonalen** gezeichnet.

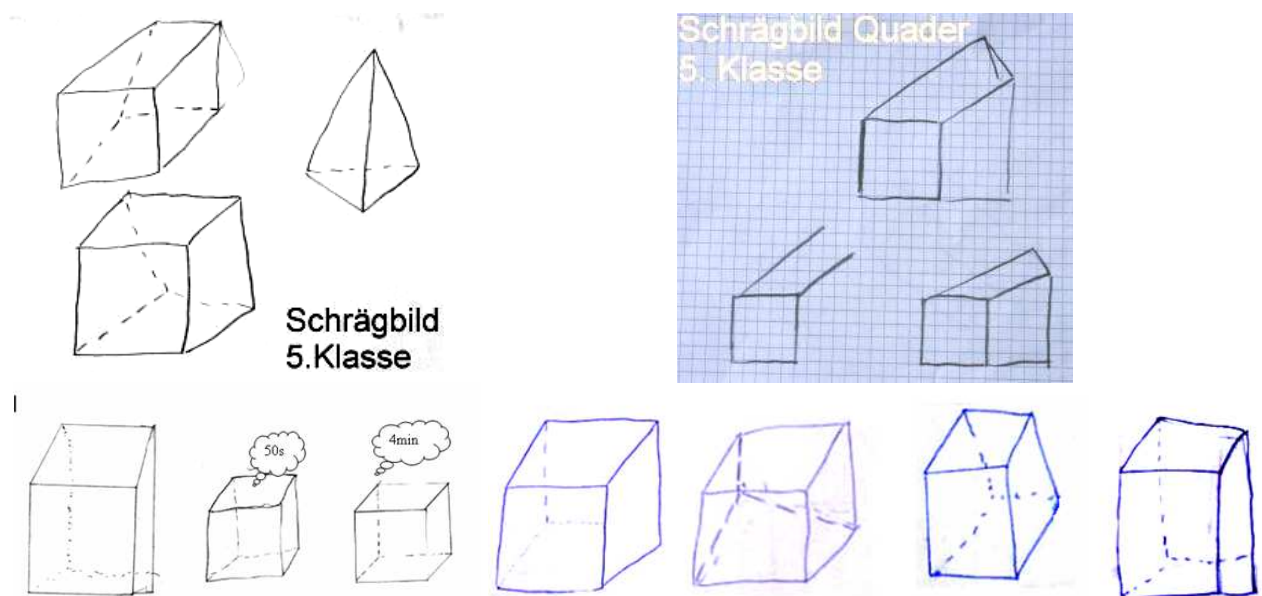
- Das Schrägbild vereinigt den Vorteil der Maßtreue bei der Frontalansicht mit einer gewissen Wirklichkeitsnähe des Körperbildes.
- Das Grundprinzip des Schrägbildes, die Parallelentreue (Parallelen in Wirklichkeit sind auch Parallelen im Schrägbild), ist von Unterstufenschülern nach einigen Übungen leicht zu erfassen. Dies zeigen u.a. Schülerzeichnungen von einfachen Körpern.

Kapitel 2

- Man hat nun die Möglichkeit, Schrägbilder frei hand oder mit Lineal bzw. Geodreieck zeichnen zu lassen. Beides muss geübt werden und beides hat seine Berechtigung. Während bei der schnellen Freihandzeichnung Übersicht und Feinmotorik nötig sind, sind bei einer genauen Schrägbildzeichnung mit Lineal Konzentration und Geduld wichtig.
- Es ist allerdings zu beachten, dass ein mit Lineal gezeichnetes Schrägbild eher "schief" aussieht wie ein Freihandschrägbild. Dies liegt wohl daran, dass Freihandlinien vom Auge "gnädiger" behandelt werden.

Schülerzeichnungen

Schrägbild Quader



Schrägbilder 6.Klasse

Der Bau der Körper

Neben dem **ikonischen** (Schrägbilder) und dem **abstrakten** bzw. **formalen** (Definitionen) Begriffserwerb kann man auch noch den **enaktiven** bzw. **handlungsbezogenen** (Bau von Modellen) Begriffserwerb stellen.

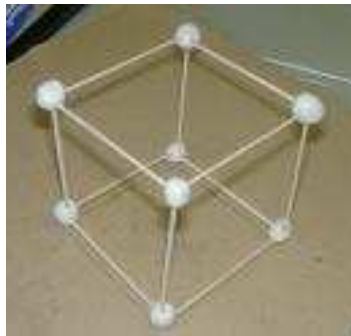
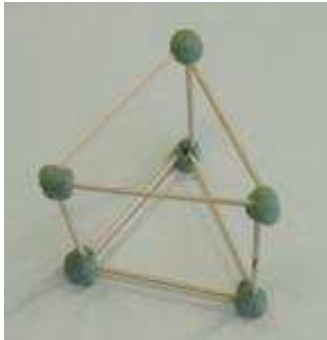
Eine Möglichkeit, diese Begriffserwerbsebene zu nutzen, ist der Bau von Modellen. Diese Ebene darf in dieser Jahrgangsstufe nicht übergangen werden. Es sei an Piaget erinnert, nach dessen Stufentheorie sich die Schüler in diesem Alter in der Phase der "**konkreten Operationen**" befinden.

Der Bau von Modellen ist zudem eine Abwechslung im häufig recht kopflastigen gymnasialen Anfangsunterricht.

Kapitel 2

Es gibt drei Arten von Modellen:

Das Kantenmodell



Beim Kantenmodell werden nur die Kanten und Ecken des Körpers mit geeigneten Materialien nachgebildet.

Das Hohlmodell



Das häufigste selbst hergestellte Modell ist das Hohlmodell.



Bei diesem werden nur die Flächen des Körpers nachgebildet und zur Körperoberfläche zusammengefügt.

Das Vollmodell

Beim Vollmodell wird der gesamte Körper nachgebildet also nicht nur die Kanten oder die Oberfläche. Vollmodelle werden aber sehr selten selbst hergestellt, sondern oft schon als fertige Modelle verwendet.



Kapitel 2

Dynamische Konstruktion

Natürlich ist auch eine Dynamische Vorstellung der Körper wichtig, rotierende Dreiecke ergeben Kegel, rotierende Rechtecke Zylinder, rotierende Halbkreise Kugeln es können aber auch die Körper in einander umgewandelt werden.

2. Körpernetze

Theorie:

Im Bereich der Körpernetze sollen die Schüler die Netze von Würfeln, Quadern, einfachen Prismen und spezielle Pyramiden kennen lernen.

Während Quader- und Würfelnetze "vollständig" berechnet und anschließend gezeichnet werden können, gilt dies im Allgemeinen für Prismen- und Pyramidennetze nicht.

Sind von einem Prisma aber die Form der Grundfläche und die Höhe gegeben, so ist auch für diese Jahrgangsstufen die Erstellung des dazu gehörigen Netzes möglich.

Bei einer Pyramide sind für diese Jahrgangsstufen nur ganz spezielle Netzformen möglich (z.B. das Tetraeder oder regelmäßige Pyramiden).

Beispiele

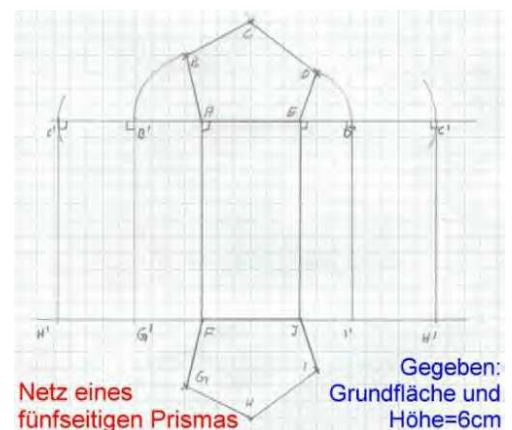
Zur Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens folgen Beispiele.

Es werden die Netze von den Grundkörpern aufgezeigt, welche in der 5. und 6. Jahrgangsstufe hergestellt bzw. konstruiert und verstanden werden können. Neben Schülermaterial zu Quadernetzen sind auch ein Würfelnetzspiel (siehe Madin) dabei, bei dem es darum geht, die entsprechenden Kanten eines Netzes zusammenzufügen.

Verschiedene einfache Netzkonstruktionen

Prismennetz :

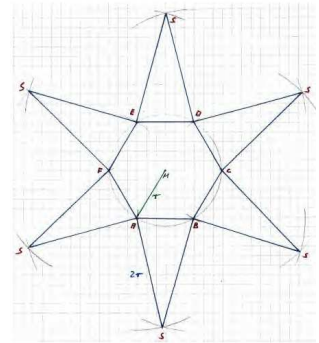
Gibt man ein beliebiges n-Eck vor, so sind die Schüler in der Lage auf Basis dieses n-Ecks das Netz eines n-seitigen geraden Prismas mit vorgegebener Höhe zu konstruieren.



Kapitel 2

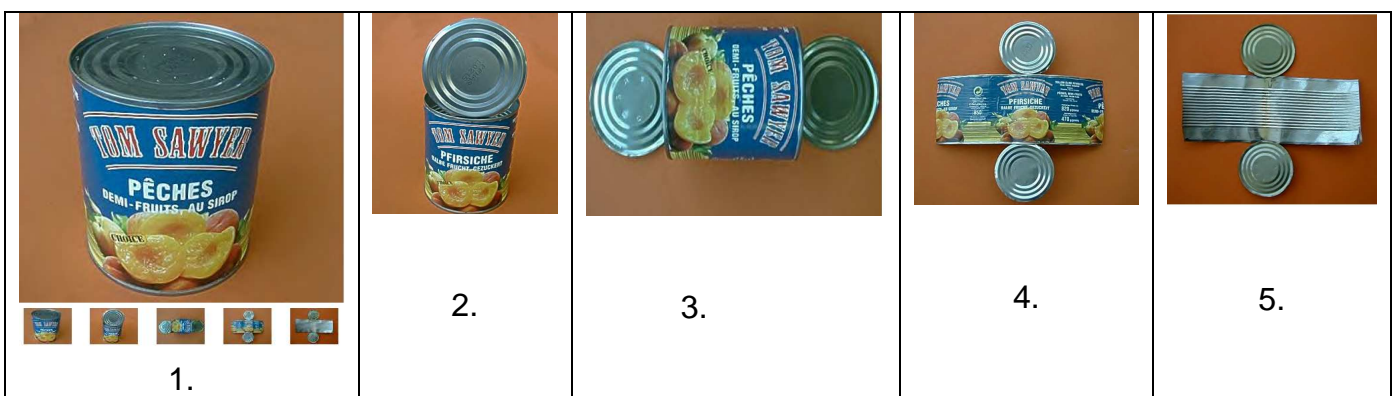
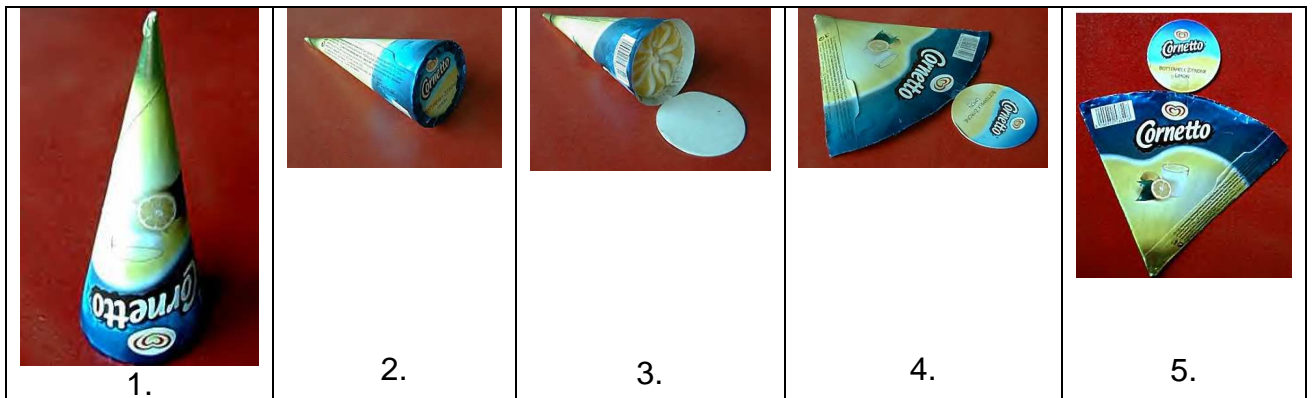
Pyramidennetz :

Netze von geraden, regelmäßigen Pyramiden, bei denen es nicht auf die Höhe der Pyramide ankommt, sind möglich. Hier müssen die Schüler allerdings regelmäßige n-Ecke zeichnen können.



Zylinder- und Kegelnetz :

Während die Konstruktion eines Zylindernetzes für Schüler, die sich im Unterricht näher mit dem Kreis beschäftigt haben, noch verständlich ist, ist ein Kegelnetz schon sehr kompliziert, da hier der Zusammenhang zwischen Öffnungswinkel, Mantellinie und Kreisbogen noch nicht behandelt wurde. Qualitativ sollten die Netze dieser Körper im Unterricht angesprochen werden. Insbesondere sollten im Unterricht zylinder- und kegel-förmige Verpackungen demonstriert und abgewickelt werden.



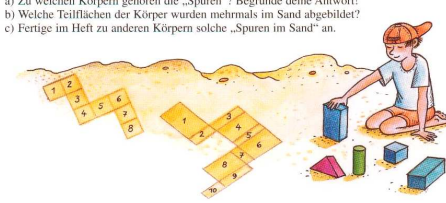
Kapitel 2

Quader und Würfelnetze:

6.2.2 Quader, Würfel, Netze

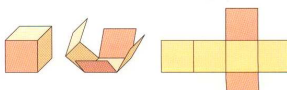
1 Eric spielt am Strand mit Bauklötzen. Beim mehrmaligen Kippen der Bauklötze hinterlässt jeder der Bauklötze andere „Spuren“ im feuchten Sand.

a) Zu welchen Körpern gehören die „Spuren“? Begründe deine Antwort!
 b) Welche Teilflächen der Körper wurden mehrmals im Sand abgebildet?
 c) Fertige im Heft zu anderen Körpern solche „Spuren im Sand“ an.

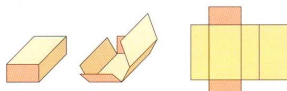


Schneidet man einen Körper an einigen Kanten auf und breitet die Begrenzungsflächen zu einer ebenen, zusammenhängenden Fläche aus, so erhält man das **Netz** eines Körpers.

Das Netz eines Würfels besteht aus sechs gleichen Quadraten.



Das Netz eines Quaders besteht aus drei Paaren gleicher Rechtecke.



Warum sind die Spuren in der Aufgabe 1 keine Netze?

2 **Erinnere dich.**

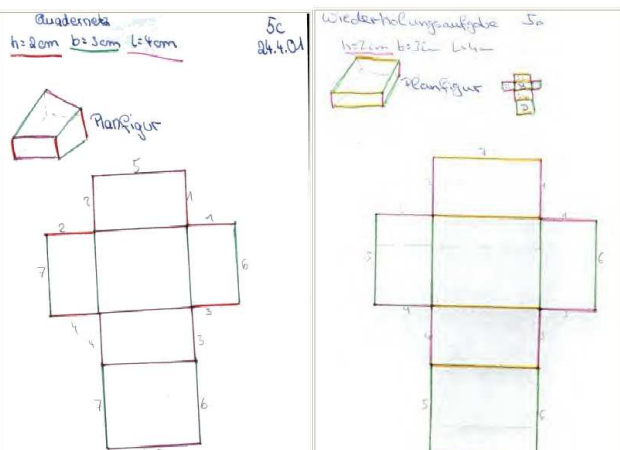
a) Wie viele Kanten und Ecken hat ein Würfel bzw. Quader?
 b) Wie viele Begrenzungsflächen hat ein Würfel bzw. ein Quader?
 c) Worin unterscheiden sich Würfel und Quader?

Quadernetze
 $h=2\text{cm}$ $b=3\text{cm}$ $l=4\text{cm}$

5C
 24.4.04

Wiederholungsaufgabe 5a
 $h=2\text{cm}$ $b=3\text{cm}$ $l=4\text{cm}$

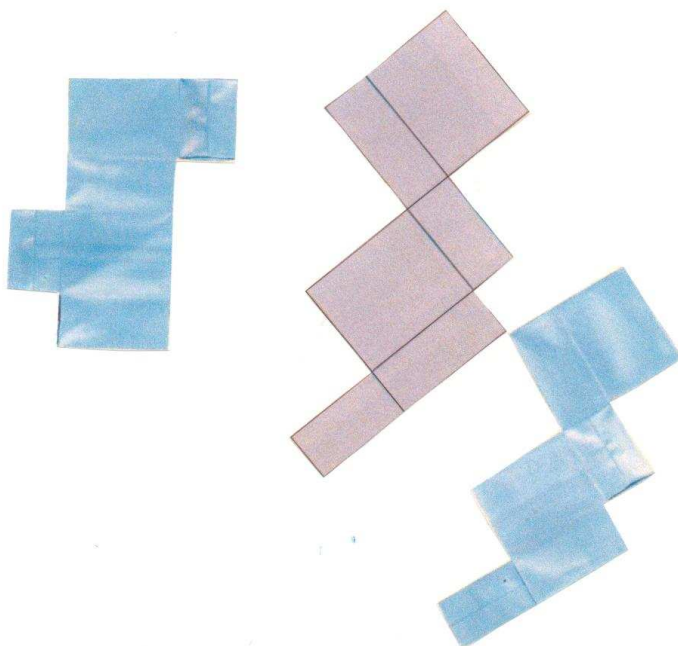
Planfigur



Quadernetze von Schülern aus Klasse 5

X Quadrat Mathematik 5 Oldenbourg

Quadernetz einer Trinkpackung



Zwei quaderförmige Trinkpäckchen werden an verschiedenen Kanten aufgeschnitten und auseinander gefaltet.

Mathematik konkret 1 Baden-Württemberg ; Cornelsen 2004

Kapitel 2

3. Rauminhalt

Überblick:

In diesem Modul wird auf das **Vergleichen**, das **Messen** und das **Berechnen** von Rauminhalten einfacher Körper - meist Quader - genauso eingegangen.

Während sich das **Berechnen** von Volumina in der einfachen Formel $V = l \cdot b \cdot h$ erschöpft und auch von den Schülern **rezeptartig** behandelt wird, zeigt sich, dass beim **Vergleich von Volumina** verschiedener Körper oder auch von Maßeinheiten **erhebliche Schwierigkeiten**, auch noch bei älteren Schülern, vorhanden sind.

Im propädeutischen Geometrieunterricht erhält die **enaktiven Seite** der Begriffsbildung eine größere Bedeutung. Das bedeutet, dass **Erfahrungen** ermöglicht werden müssen, bei denen die Schüler **messend** und **vergleichend** an Körpern vorgehen können. Dies sollte in enger Wechselbeziehung zur Berechnung der Rauminhalte erfolgen.

Theorie:

Der Theorieteil will über drei Bereiche erste Informationen liefern. Zunächst soll die didaktische Bedeutung des **Vergleichens**, **Messens** und **Berechnens** von Rauminhalten dargestellt werden. Begleitend zum Messen und Berechnen finden auch **Umrechnungen** in verschiedene Rauminhaltseinheiten statt. Als drittes sollen noch tiefer gehende Betrachtungen zum Begriff des Rauminhaltes gegeben werden.

Didaktisch entwickelndes Prinzip

- Vergleichen von Rauminhalten
- Messen von Rauminhalten
- Berechnen von Rauminhalten

Vergleichen von Rauminhalten

Zunächst wird, um den Begriff Rauminhalt auf erster Stufe zu klären, das Fassungsvermögen zweier Hohlkörper (offener Plexiglaswürfel, Milchtopf usw.) verglichen. Hier hat dann der Begriff Rauminhalt nach Fricke (1983) eine unmittelbare Bedeutung. Bei massiven Körpern empfehlen sich Wasserverdrängungsversuche.

Zwei Körper haben das **gleiche Volumen**, wenn sie als Hohlkörper **gleiches Fassungsvermögen** besitzen oder als Vollkörper (in Wasser eingetaucht) gleich viel Wasser verdrängen (vgl. Palzkill (1971)). Eine schon etwas weitergehende Möglichkeit

Kapitel 2

spricht Fricke (1983 S. 222) an, indem er verschiedene inhaltsgleiche Quader aus der gleichen Anzahl von Cuisenairestäben oder anderen identischen Grundkörpern bauen lässt. Unterteilt man die (Quader-)Stäbe nun in "Würfel", so hat man schon einen ersten Schritt in Richtung des Messens von Rauminhalten getan.

Messen von Rauminhalten

Nach dem **qualitativen Vergleichen** von Rauminhalten muss nun der Schritt zum **quantitativen Messen** von Rauminhalten getan werden. Will man über große Entfernungen das Volumen zweier Badewannen, zweier Schwimmbäder oder sonstiger unbeweglicher Gegenstände vergleichen, so hilft die bisherige Vergleichsmethode nicht weiter.

Hier hilft nun die **Einführung** einer **Maßeinheit**. Als Maßeinheit bieten sich Einheitswürfel in beliebiger Größe oder andere genormte Körper (z.B. Kugel, Quader usw.) an (Man denke an die Bestimmung des Rauminhalts eines Kofferraums eines Kraftfahrzeuges.).

Dann wird das **Volumen** eines Körpers durch **Ausfüllen** mit **Einheitswürfeln** gemessen (Palzkill 1971). Auch Fricke macht dies ähnlich, wobei er bei seinem Vorgehen schon den Blick auf die Berechnung von Rauminhalten richtet. Er legt die Grundfläche eines Quaders, welche 20 Einheitsquadrate beträgt, mit "quaderförmigen" Stangen der Länge 4 aus. Für die Grundschicht braucht er dann 5 solcher Stangen. Daraus folgt, dass eine Grundschicht aus $5 \cdot 4$ Zentimeterwürfel besteht. Nun stellt er fest, dass 3 solcher Schichten den Quader, dessen Volumen er bestimmen möchte, genau ausfüllen. Man hat also: $V = (5 \cdot 4) \cdot 3 = 60$ Einheitswürfel.

Berechnen von Rauminhalten

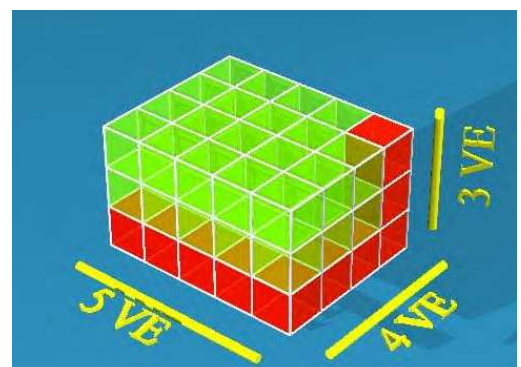
Nach der Messung des Rauminhaltes mit Einheitswürfeln, geht man nach dieser immer noch sehr anschaulichen Methode zur **rein formalen Darstellung** des Quadervolumens über.

Das Auffüllen des Quaders legt nach Fricke(1983 S. 225) folgende anschauliche Formulierung für das Volumen eines Quaders nahe: **Volumen = Größe der Grundschicht mal Anzahl der Schichten.**

Von dieser anschaulichen Formulierung kommt man nun zur formalen. Ein Quader dessen Kantenlängen durch die Maßzahlen l, b, h gegeben sind, hat als Volumen: $V = l \cdot b \cdot h$

Es ist zu beachten, dass die Maßzahlen l, b, h aber noch nicht als Variable im mathematischen Sinn aufgefasst werden, sondern in dieser Jahrgangsstufe noch immer den Platzhalterstatus aus der Grundschule haben.

Palzkill (1971 S. 61) warnt bei der Bestimmung des Volumens eines Quaders durch Ausmessen seiner



Kapitel 2

Kanten davor, dass der Eindruck entstehen könnte, dass Rauminhalte doch letztlich mit einem Längenmaß gemessen werden. Dies trifft nicht zu, denn ein Volumen kann nur mit einem Raummaß gemessen werden. Mit dem Längenmaß werden nur die Anzahlen der Einheitswürfel gezählt, welche in die Kanten "hineinpassen".

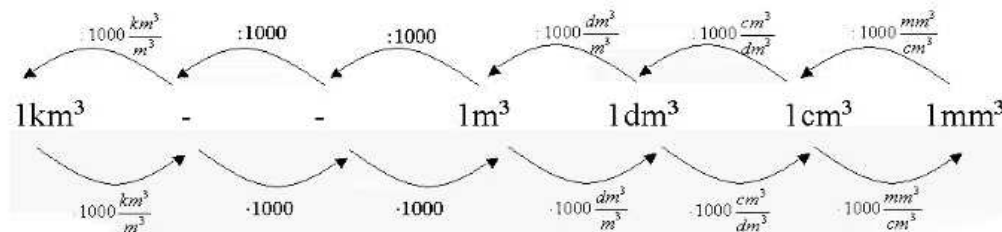
Umrechnen von Volumeneinheiten

Große Probleme bereitet den Schülern auch das Umrechnen der einzelnen Volumeneinheiten ineinander. Wird dieses Problem in der Unterstufe nicht aktiv angegangen, so können die betroffenen Schüler zu regelrechten "Einheitenalphabeten" werden.

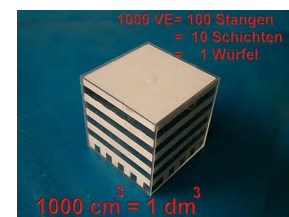
Die Würfelmethode

- Volumen eines Würfels mit 1cm bzw. 10mm Kantenlänge.
 $(1 \text{ cm})^3 = (10 \text{ mm})^3 = 1000 \text{ mm}^3$
- Volumen eines Würfels mit 1dm bzw. 10cm Kantenlänge.
 $(1 \text{ dm})^3 = (10 \text{ cm})^3 = 1000 \text{ cm}^3$
- Volumen eines Würfels mit 1 m bzw. 10dm Kantenlänge.
 $(1 \text{ m})^3 = (10 \text{ dm})^3 = 1000 \text{ dm}^3$
- Volumen eines Würfels mit 1km bzw. 1000 m Kantenlänge.
 $(1 \text{ km})^3 = (1000 \text{ m})^3 = 1\,000\,000\,000 \text{ m}^3$

Die **1000er Sprünge** nach Fricke:

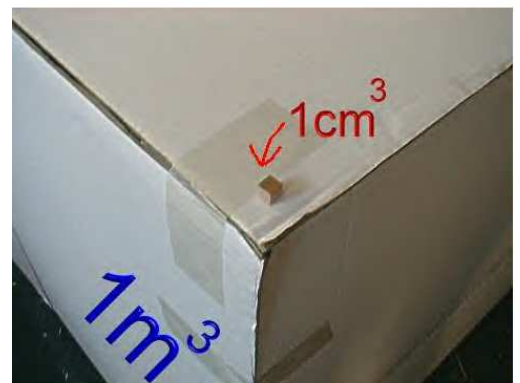
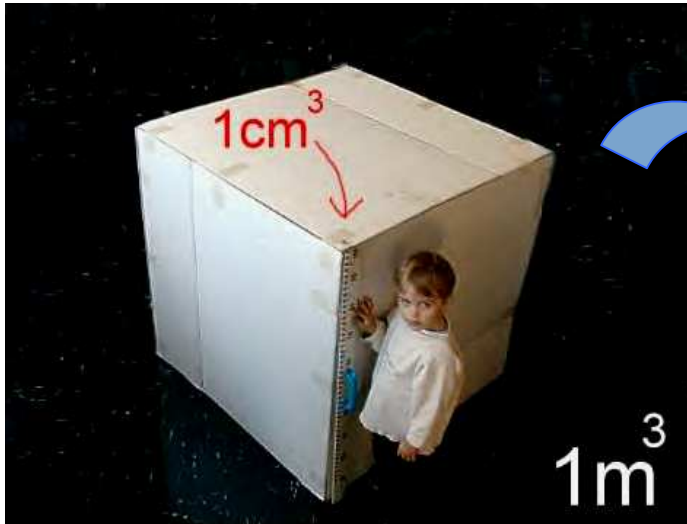


Die "**Raum-Umrechnungszahl**" 1000 lässt sich auch optisch schön an so genannten Tausenderwürfel zeigen. Dieser Würfel ist eigentlich an jeder Schule für Demonstrationszwecke vorhanden.



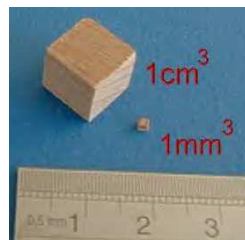
Kapitel 2

Beispiele



Der Kubikmeter, Kubikzentimeter, ...

und Kubikmillimeter



Kapitel 2

Beispielhafte Schöleraufträge

1. Volumeneinheiten

Untersuche deine Umgebung nach möglichst vielen unterschiedlichen Volumeneinheiten. Frage deine Großeltern oder besuche Betriebe und Geschäfte (Winzer, Bauer, Getränkemarkt, Großhandel, Tankstelle usw.). Welche Volumeneinheit wird am häufigsten verwendet?

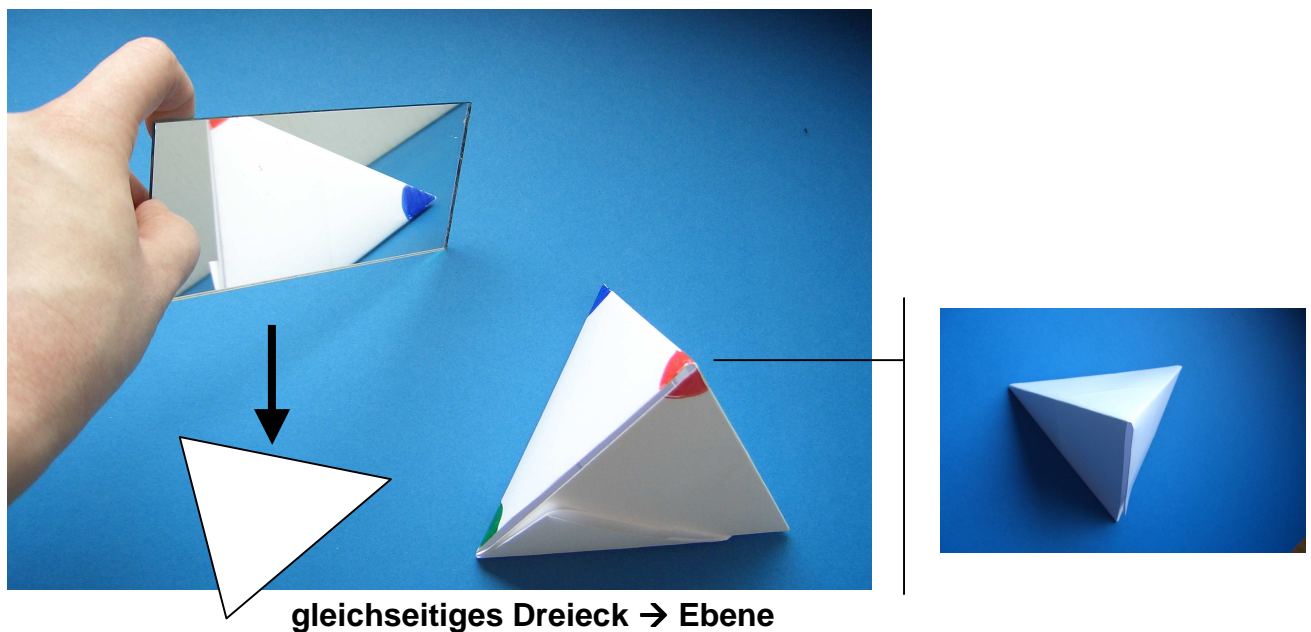
2. Volumenmessstation

Bestimme mit Hilfe eines Küchenmessbechers das Volumen von drei unregelmäßig geformten Gegenständen. Wieso kann man mit einem Messbecher auch das Gewicht von Mehl oder Zucker bestimmen?

3. Schwimmbad

Wie viel Wasser passt in ein Hallenbad oder ein Freibad in eurer Stadt? Schätze, berechne und frage nach.

Übergang von der Raumgeometrie in die Ebene Geometrie



Kapitel 2

2.2.2. Ebene Geometrie

2.2.2.1. Lerninhalte

Zentrale **Lerninhalte** der ebenen Geometrie in Klasse 5/6 sind folgende grundlegende Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten:

- der Umgang mit **Lineal, Geodreieck** und **Zirkel**;
- geometrische **Grundbegriffe** wie Punkt, Strecke, Halbgerade, Gerade, Fläche;
- geometrische **Relationsbegriffe** wie senkrecht und parallel; Figurbegriffe wie **Dreieck** (auch gleichschenkliges Dreieck, gleichseitiges Dreieck, rechtwinkliges Dreieck) und **Viereck** (auch Rechteck, Quadrat, Parallelogramm, Trapez, ...);
- anschauliche Vorstellungen von **Symmetrien** (Achsensymmetrie, Punktsymmetrie, Drehsymmetrie) und der **Kongruenz** (Deckungsgleichheit) von Figuren sowie von den **Kongruenzabbildungen**;
- eine Einführung in den **Winkelbegriff**, das Messen von Winkeln und Bezeichnungen wie rechter Winkel, spitzer Winkel, stumpfer Winkel;
- eine vertiefte Behandlung der **Maßeinheiten für Längen und Flächen**, insbesondere deren Größenordnungen und deren korrekte Umrechnung;
- eine Einführung in die **Inhaltslehre**, die die Herleitung von Formeln für den Umfang und den Inhalt von Rechtecken umfasst sowie das Prinzip der Flächenmessung durch Zerlegen und Ergänzen.

Fasst man die zentralen **Lerninhalte** der ebenen Geometrie in Klasse 5/6 zusammen, so lassen sich die zu vermittelnden Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten durch folgende **zentrale Ideen** charakterisieren:

- Bei den geometrischen Begriffen geht es in erster Linie um den **Aufbau angemessener Vorstellungen**. Ein Fortschritt gegenüber dem Lernen in der Grundschule besteht im Erfassen der **Merkmale und Eigenschaften von Figuren**, etwa dem Erkennen von gleich langen oder parallelen Seiten oder gleich großen Winkeln.
- Die Kenntnisse bestimmter Merkmale und Eigenschaften von Figuren können **Fortschritte beim Problemlösen** unterstützen.
- Der **Umgang mit Zeichengeräten** wie Geodreieck und Zirkel ist mit dem Erfassen der Merkmale und Eigenschaften eng verknüpft und eröffnet neue Möglichkeiten bei der Darstellung geometrischer Sachverhalte. Werden **Fertigkeiten im Freihandzeichnen** gefördert, so kann dies der Heuristik beim Problemlösen zugute kommen.
- Die **Einführung von Formeln** (z.B. für Umfang und Flächeninhalt) nutzt arithmetische Kenntnisse für die Geometrie und eröffnet in der Geometrie

Kapitel 2

neue Wege. Gleichzeitig wird damit eine Verbindung von Geometrie- und Algebraunterricht hergestellt.

2.2.2.2. Überblick:

1. Zeichnen und Falten
2. Geobrett
3. Tangram
4. Messen und Berechnen

1. Zeichnen und Falten

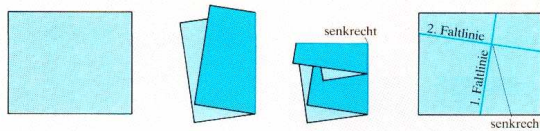
Zeichnen und Falten als vorbereitende Übungen stoßen jedoch auch an **Grenzen** und können insbesondere zur Festigung von **Fehlvorstellungen** beitragen, insbesondere im Bereich der Kongruenzabbildungen:

- Beim Übereinanderlegen von Transparentpapier zur Demonstration von Abbildungen benutzt man eigentlich zwei Ebenen.
- Das Falten von Papier erzeugt zwar achsensymmetrische Figuren, die Handlung selbst führt jedoch aus der Ebene heraus, weshalb sie nicht unbedingt als Prototyp einer Achsenspiegelung herangezogen werden kann.
- Beim Zeichnen von Urbild und Bild einer Kongruenzabbildung werden nur einzelne Figuren (und davon in der Regel wiederum nur einzelne ausgezeichnete Punkte, z.B. die Eckpunkte) betrachtet und nicht die Ebene als Ganzes. Es kann der Eindruck eines Verschiebens einer Figur in der Ebene entstehen. Eine mengentheoretisch korrekte Auffassung der Kongruenzabbildungen ist jedoch die einer Abbildung der Ebene in sich.

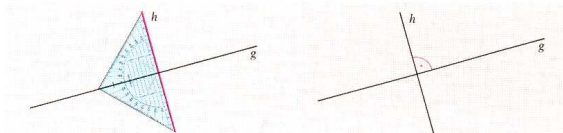
Kapitel 2

Zueinander senkrechte Geraden

Wenn wir ein Blatt Papier falten, entsteht eine Faltlinie. Falten wir dieses Blatt dann noch einmal so, daß die beiden Teile der ersten Faltlinie aufeinanderfallen, dann stehen die erste und die zweite Faltlinie **zueinander senkrecht**. Öffnen wir danach das doppelt gefaltete Blatt Papier wieder, sehen wir, daß die Faltlinien zueinander senkrecht stehen.



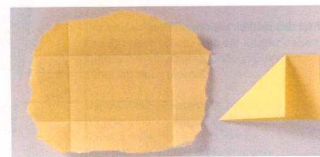
So zeichnet man mit dem Geodreieck zueinander senkrechte Geraden.



Die Geraden g und h sind senkrecht zueinander. Wir schreiben kurz: $g \perp h$. In Zeichnungen verwendet man das Zeichen \perp .

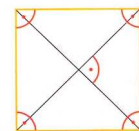
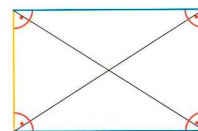
Mathematik Real 5
Baden- Württemberg Cornelsen

1 Rechteck und Quadrat



- Falte aus einem Papierausris ein Viereck mit vier rechten Winkeln. Trenne die stehende Teile ab.
- Warum sind gegenüberliegende Seiten des Vierecks gleich lang?
- Vier gleich lange Seiten – das wäre Zufall. Du mußt ein Stück des Vierecks abtrennen.
- Erkläre, was du tun mußt und warum dann alle Seiten gleich lang sind.

Die Vierecke mit vier rechten Winkeln in den Ecken heißen Rechteck und

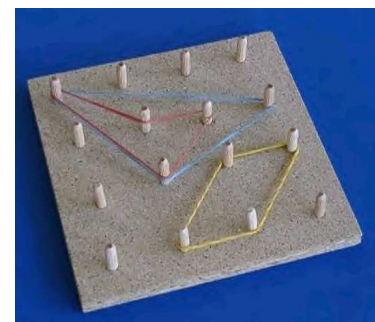


Schnittpunkt 1
BW Klett

2. Geobrett

Überblick:

Das **Geobrett** ist ein **Arbeitsmittel für die Figurenlehre und zur Vorbereitung der Inhaltslehre** im Rahmen der ebenen Geometrie. Auf einem quadratischen Holzbrett, das mit Nägeln oder anderen Befestigungselementen in einem 3x3- oder 4x4-Raster versehen ist, können mit Hilfe farbiger Gummiringe verschiedene Figuren gespannt werden.



Theorie:

Das **Geobrett** ist ein **Arbeitsmittel für die Figurenlehre und zur Vorbereitung der Inhaltslehre** im Rahmen der ebenen Geometrie. Am gebräuchlichsten ist das quadratische Geobrett: Auf einem quadratischen Holzbrett, das mit Nägeln oder anderen Befestigungselementen in einem 3x3- oder 4x4-Raster versehen ist, können mit Hilfe farbiger Gummiringe Figuren gespannt werden. Das Geobrett wurde ursprünglich vor allem für die Grundschule propagiert, findet aber auch in der Sekundarstufe I, speziell in den Klassen 5 und 6, zunehmende Verbreitung.

Das Geobrett kann Grundlage verschiedener **Schüleraktivitäten** sein:

- Erzeugen verschiedener Drei- und Vierecke sowie Benennen ihrer Eigenschaften;
- Erzeugen symmetrischer Figuren (auch in Partner- oder Gruppenarbeit);

Kapitel 2

- Übungen zum Berechnen des Flächeninhalts von Drei- und Vierecken durch Auslegen mit Einheitsquadraten;
- Übungen zur Unterscheidung inhaltsgleicher und umfangsgleicher Drei- und Vierecke.

An die **Grenzen** stößt der Einsatz des Geobretts insbesondere, wenn es um Winkel geht. So lässt sich z.B. nicht immer nachweisen, ob ein Winkel ein rechter Winkel ist.

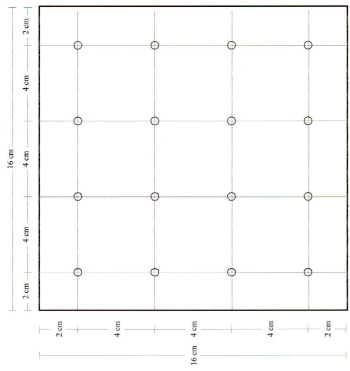
Vor- und Nachteile des Geobrettes:

- 👍 Es geht schneller als Zeichnen
- 👍 Einfach zum Nachbauen (z.B. im Technikunterricht)

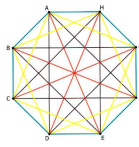

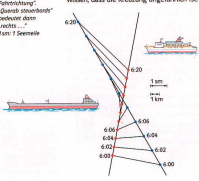
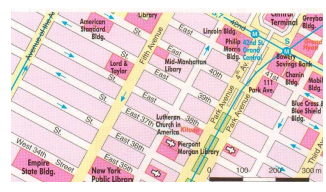
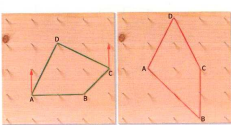

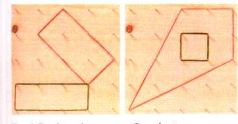
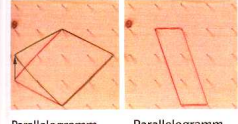
- 👎 Man kann keinen rechten Winkel nachweisen
- 👎 Es geht hauptsächlich um die Anschaulichkeit

Beispiele:

Beispiele für Arbeitsaufträge in Klasse 5 zeigen, wie mit dem Geobrett im Unterricht gearbeitet werden kann:

<p>Kennen lernen des Geobretts:</p> <p>Die Schüler sollen in Form von Gruppen bzw. Partnerarbeit selbst ein Geobrett herstellen.</p>	<div style="text-align: center;"> <p>Wir bauen ein Geobrett</p> <p><small>Um ein Geobrett zu bauen, benötigst du:</small></p> <p>Material:</p> <ul style="list-style-type: none"> • ein Holzbohlen-Quadrat mit 16 cm × 16 cm, fertig geschliffen (12 mm) • 16 Holzbohlen – je ungefähr 10 cm (10 × 2 mm) • eine Feile <p>Probleme:</p> <ul style="list-style-type: none"> • eine Holzbohle und einen Teil anderer passen in das Quadrat • man kann nicht <p>Beobachtung:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Man muss die Holzbohlen sorgfältig abfeilen, damit sie genau in die Lücken passen und die Lücken mit einem Schraubenzieher nicht zu groß sind. • Man muss die Holzbohlen sorgfältig abfeilen, damit sie genau in die Lücken passen und die Lücken mit einem Schraubenzieher nicht zu groß sind. <p><small>Das Geobrett kann so auf dem Geobrett dargestellt werden. Später wird die Verwendung von Geobretts zur Darstellung von Geometrie, Vektoren, ... dabei zu sehen. Wie kann man Geobrett darstellen?</small></p> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;"> <p>mit Bauanleitung Siehe Madin Beispiel</p> </div> <div style="text-align: right; margin-top: 20px;">  </div>
--	---

Kapitel 2

<p style="text-align: center;">Geografie Bezug</p> <p style="text-align: center;">Karten, Vermessungen... evtl. Exkursion möglich</p>	<p>12. Suche nach</p> <ul style="list-style-type: none"> • parallelen Strecken, • zueinander senkrechten Strecken, • gleich langen Strecken, • Symmetrieachsen, • Sind alle Symmetrieachsen eingetragen?  <p>13. a) Wie lang ist die Stunde der Fahrt von Warnemünde nach Geßler? b) In welchem Abstand passieren die Fähren Warnemünde-Geßler und Travemünde-Heistritze das Feuerschiff? c) Wie lange dauert die Überfahrt Warnemünde-Geßler? Sind es 30 Minuten, 2 Stunden oder 30 Stunden?</p>  <p>Auf den</p> <p>Eine Hochseefähre und ein Tanker fahren auf sich schiedenden Kursen. Die Kapitäne bleiben ganz ruhig, denn sie wissen, dass die Kreuzung ungefährlich ist.</p>  <ul style="list-style-type: none"> • Kannst du das bestätigen? Lege eine Tabelle Uhrzeit-Entfernung an. Lies daraus fahrplangewisse ab, wo sich die Schiffe am nächsten kommen und um wie viel Uhr das passiert. • Wann etwa sieht der Kapitän der Fähre den Tanker genau querab back-bords? • Wann sieht die Tankerkapitän die Fähre querab steuerbords? • Wie weit sind die Schiffe in dem Augenblick voneinander entfernt, in dem die Fähre den Kurs des Tankers kreuzt? • Was passiert um etwa 6:53 Uhr? • Wie schnell fahren die Schiffe? • Zeichne selbst Schiffsbegegnungen. 	<p style="text-align: center;">Schnittpunkt 1 Klett</p> 
<p style="text-align: center;">Arbeitsauftrag für eine Unterrichtssequenz mit Vorübungen zum Umfang und Flächeninhalt ebener Figuren.</p>	<p style="text-align: center;">2 Parallelogramm und Raute</p>  <ul style="list-style-type: none"> • Das unregelmäßige Viereck im linken Nagelbrett wird zu einem regelmäßigen Viereck, wenn du statt A oder C einen anderen Eckpunkt wählst. • Beschreibe die Eigenschaften der neuen Vierecke. • Kannst du solche Vierecke auch bekommen, wenn du B oder D verlegst? • Im Nagelbrett rechts ist nicht verraten, wohin du A, B, C oder D verlegen sollst. Ein besonders schönes Viereck siehst du bestimmt schon. <p>In manchen Vierecken sind gegenüberliegende Seiten parallel. Solche Vierecke heißen Parallelogramm und Raute.</p>  <p>Ein Viereck, in dem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt Parallelogramm. Je zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang. Ein Parallelogramm mit vier gleich langen Seiten heißt Raute.</p>	 <p>Zwei Rechtecke ohne Überlappung Quadrat im Drachen</p>  <p>Parallelogramm → Drachen Parallelogramm mit zwei Nägeln innen</p>

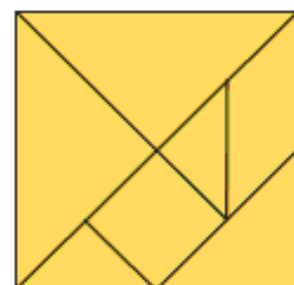
3. Tangram

Theorie

Das bekannte **Tangram - Puzzle**, bestehend aus sieben Figuren (fünf Dreiecke und zwei Vierecke), die zusammen ein Quadrat ergeben, kann im Geometrieunterricht der Klassen 5 und 6 als Arbeitsmittel eingesetzt werden.

Folgende Schüleraktivitäten können mit Hilfe des Tangram- Puzzles angeregt werden:

- Benennen verschiedener Drei- und Vierecke sowie ihrer Eigenschaften;
- Erzeugen symmetrischer Figuren (in Partnerarbeit);



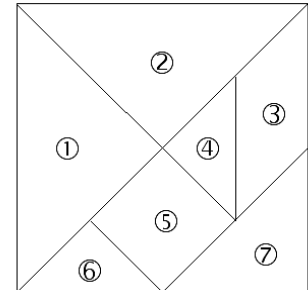
Kapitel 2

- Übungen zum Berechnen des Flächeninhalts von Drei- und Vierecken durch Flächenzerlegung und -ergänzung.

Beispiele

Die Schüler **legen Figuren** nach Vorlage oder freie Figuren.

Ein erster, eher spielerischer Einstieg, der primär dem vertraut werden mit den Tangram-Figuren dient und der Neugier jüngerer Schüler Rechnung trägt. Beim Legen nach Vorlage ist eine Stufung der Schwierigkeiten möglich, wenn die Begrenzungen der Teilfiguren zunächst angegeben werden, später hingegen nicht mehr.



Varianten:

- Die Schüler legen Figuren nach Vorlage und suchen Symmetrieachsen dieser Figuren.
- Die Schüler legen freie Figuren, die vorgegebene Symmetrieeigenschaften (Achsen- oder/und Punktsymmetrie) erfüllen sollen.
- Die Schüler benennen die einzelnen Tangram-Figuren (oder daraus kombinierte komplexere Figuren) und beschreiben deren Eigenschaften.

Lernziel: Die Schüler kennen die Bezeichnungen und Eigenschaften von Drei- und Vierecken.

Es gibt weitere (etwas schwierigere) Varianten mit dem Tangram – Puzzle zu arbeiten. Zum Beispiel Inhaltberechnung durch Flächenzerlegung und –ergänzung sowie zu vorgegebenen Figuren achsensymmetrischen oder punktsymmetrischen Flächen zu finden.

Hinweise:

Es ist wichtig, dass der Arbeitsauftrag das zugrunde liegende Prinzip des Vergleichens von Flächen klar herausstellt (im Sinne einer Prozesshilfe für den Lösungsweg). Eigene Erfahrungen zeigen, dass Schüler andernfalls lediglich nach Formeln suchen.

In Klasse 5 oder 6 handelt es sich um einen umfangreicheren Arbeitsauftrag mit der Möglichkeit einer abschließenden Selbstkontrolle durch die Schüler (die Summe der Flächeninhalte aller sieben Tangram-Figuren ist gleich dem Flächeninhalt des Gesamtquadrats).

Der Arbeitsauftrag kann auch zur Vorbereitung der Flächenformeln für Parallelogramm und Trapez (üblicherweise in Klasse 8) eingesetzt werden.

Kapitel 2

4. Messen und Berechnen

Auch in Bezug auf die Maßbegriffe geht es in Klasse 5/6 vorwiegend um den Aufbau angemessener Vorstellungen und grundlegender Fertigkeiten. Es wird ein **inhaltliches Begriffsverständnis** bei den Schülern angestrebt (vgl. Holland 1988, 192ff).

In Erweiterung der Zusammenstellung von Holland bedeutet dies konkret: Die Schüler können zwischen der **Figur** bzw. dem **Körper** (beispielsweise Strecke, Rechteck, Quader) und den **zugehörigen Größen** (beispielsweise Länge, Umfang, Flächeninhalt, Rauminhalt, Oberfläche) unterscheiden. Dies gilt auch für die Notation.

- Sie können insbesondere zwischen Flächeninhalt und Umfang einer Figur sowie (später) zwischen Rauminhalt und Oberfläche eines Körpers unterscheiden und besitzen hierzu adäquate Grundvorstellungen.

Kapitel 2

- Die Schüler können Umfang und Flächeninhalt verschiedener Figuren anschaulich **vergleichen** und durch entsprechende **Handlungen** wie Abwickeln oder Ineinanderlegen kontrollieren.
- Die Schüler können den Umfang durch **Längeneinheiten** und den Flächeninhalt durch **Flächeneinheiten** messen. Sie wissen ferner, dass das **Messen** einer Größe die Frage beantwortet, wie viele Einheiten in die Größe passen.
- Die Schüler kennen passende **Maßeinheiten** für die jeweiligen Größen. Sie kennen die **Größenordnungen** der jeweiligen Einheiten und können damit entsprechende Alltagsvorstellungen verbinden.
- Die Schüler können insbesondere **verschiedene Einheiten ineinander umrechnen**. Hierzu können den Schülern Lernhilfen gegeben werden.
- Die Schüler kennen die zur Berechnung benötigten **Formeln** und können sie anwenden sowie nach einzelnen Variablen auflösen.
- Die Schüler können bei Vielecken in geeigneten Fällen die Flächengleichheit durch Zerlegen oder/und Ergänzen entscheiden.