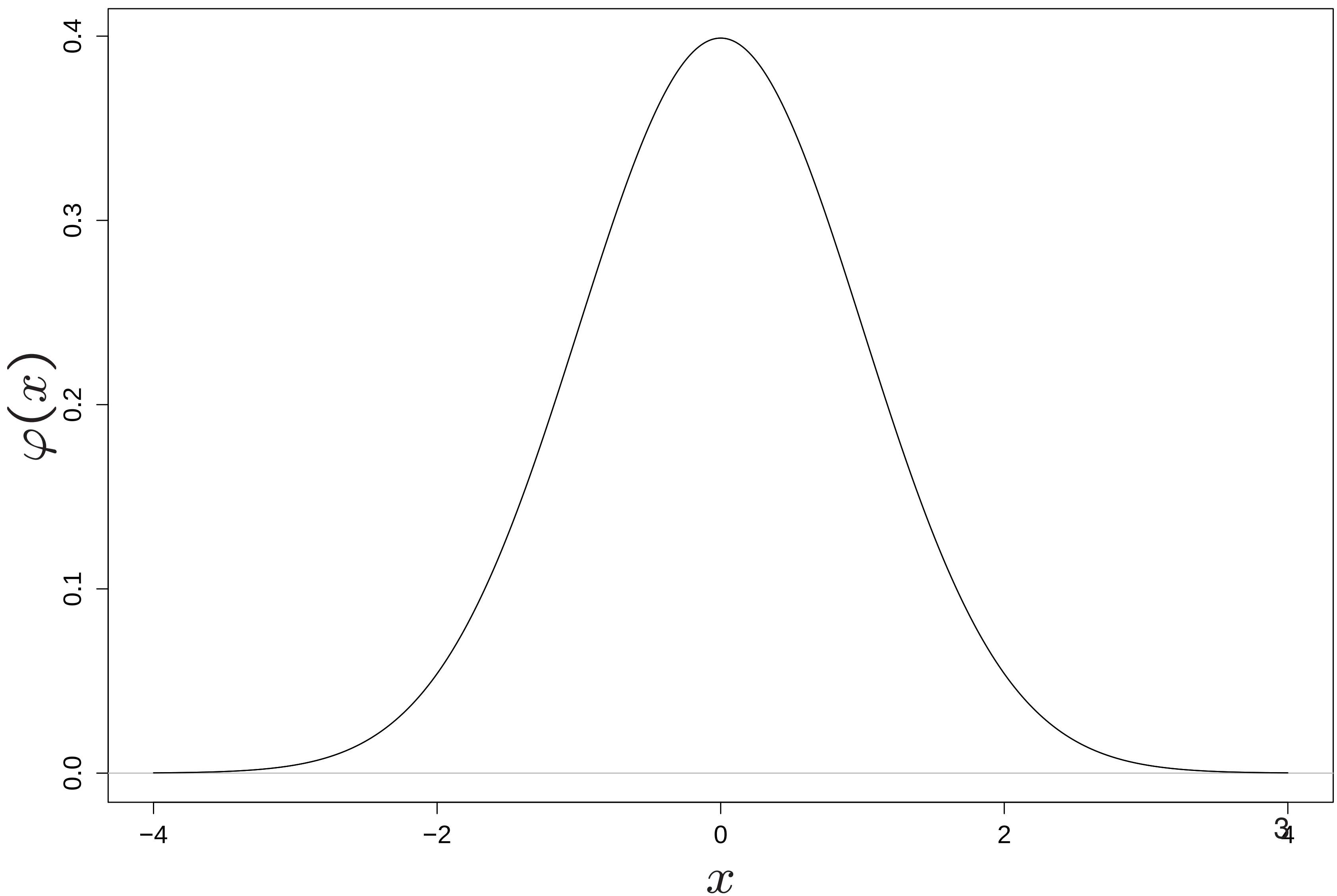
Vorlesung 7b

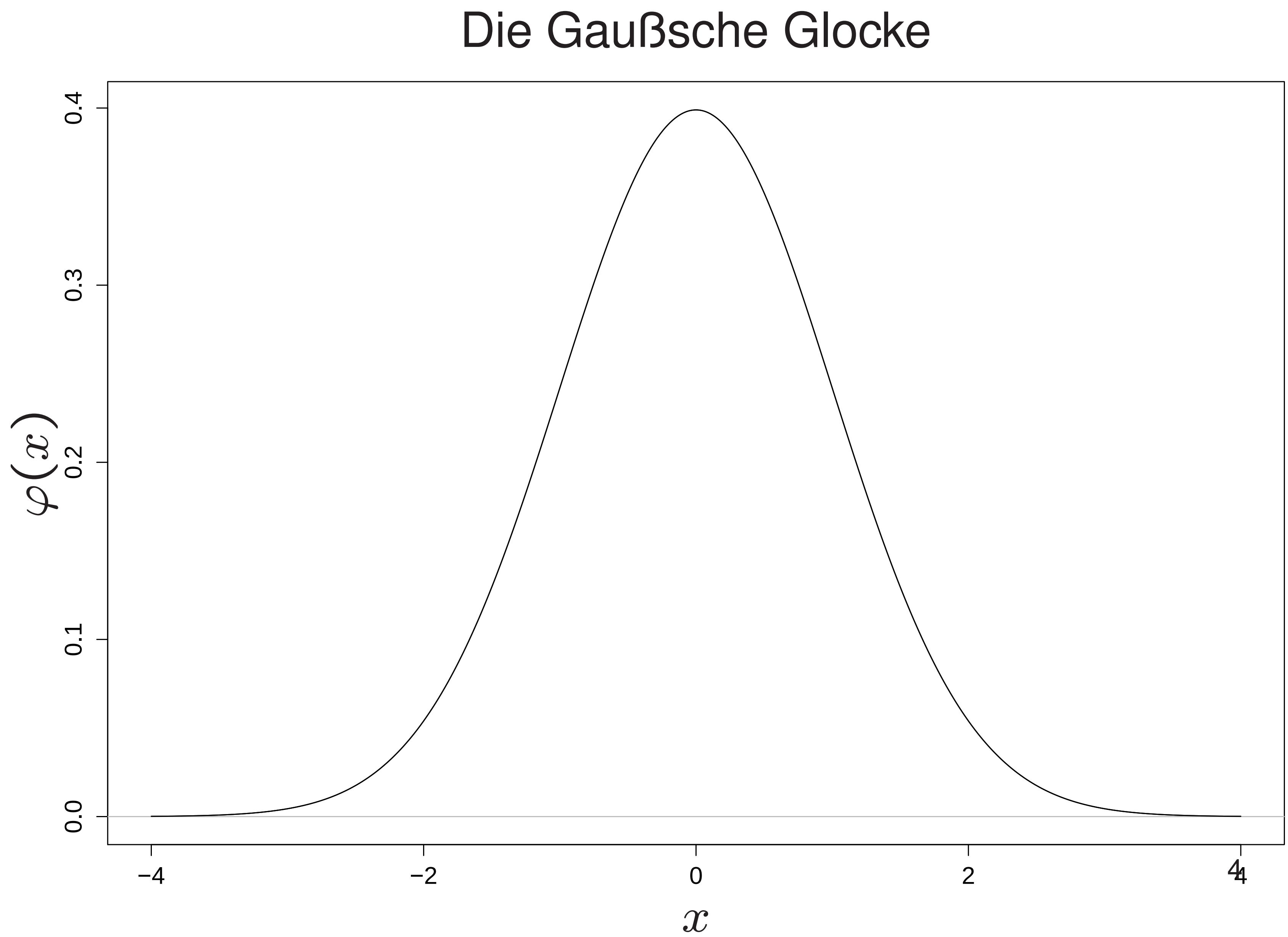
Unabhängigkeit bei Dichten

und die mehrdimensionale Standardnormalverteilung

0. Wiederholung: Die Normalverteilung

Dichtefunktion φ der Standardnormalverteilung




Die Gaußsche Glocke
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
$\varphi(x)$
−4
−2
0
2
4
x

Die Standardnormalverteilung

Dichtefunktion:

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

Verteilungsfunktion:

$$\Phi(b) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-x^2/2} dx$$

Z standard-normalverteilt $:\Longleftrightarrow$

$$\mathbf{P}(\, Z \leq b \,) = \Phi(b)$$

Für standard-normalverteiltes Z gilt:

$$\mathbf{E}Z = 0 \qquad \sigma_Z = 1$$

Allgemeine normalverteilte Zufallsvariable entstehen so:

$$N = \mu + \sigma Z$$

Für sie gilt:

$$\mathbf{E}N = \mu \qquad \sigma_N = \sigma$$

Für standard-normalverteiltes Z gilt:

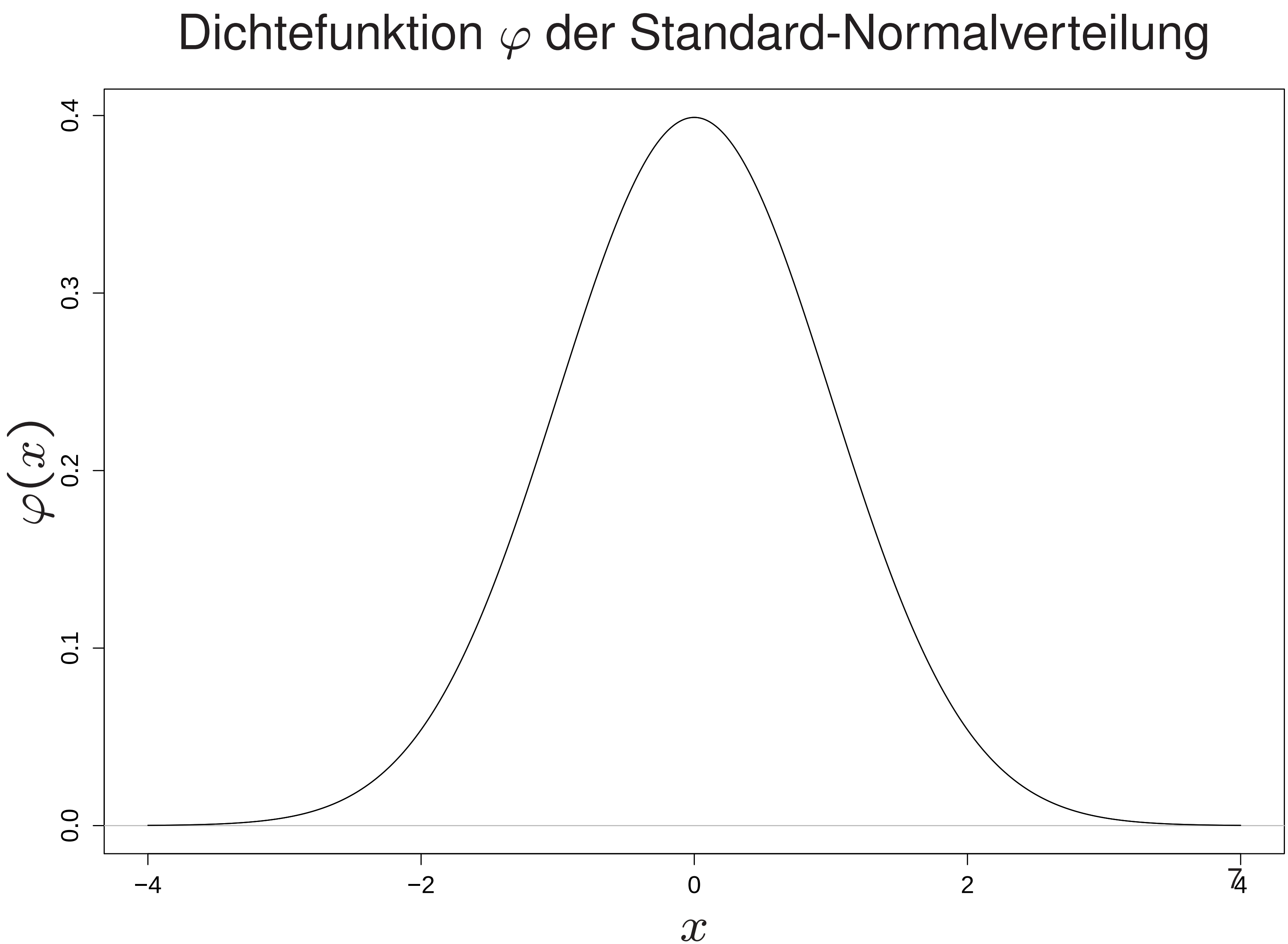
$$\mathbf{E}Z = 0 \qquad \sigma_Z = 1$$

Allgemeine normalverteilte Zufallsvariable entstehen so:

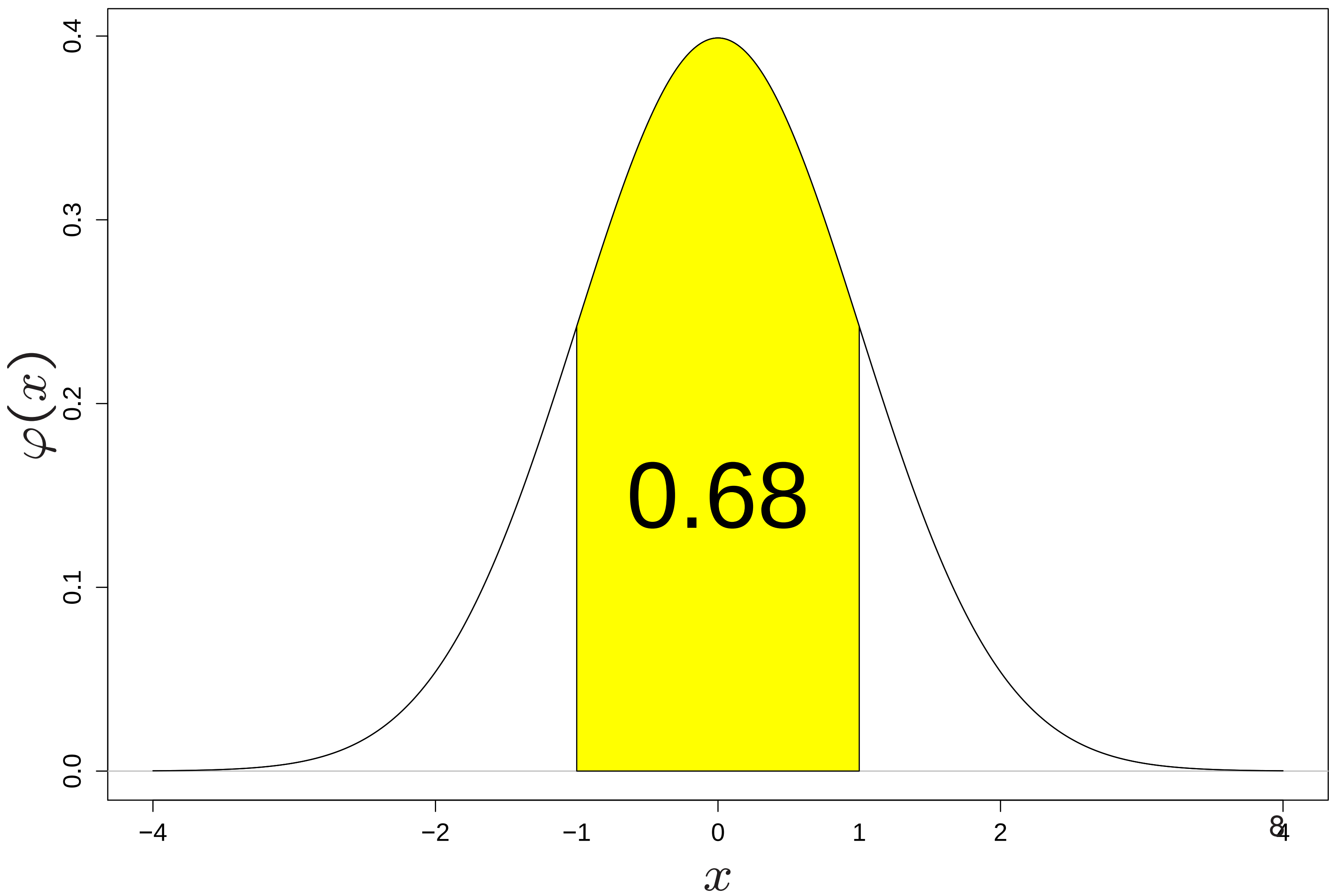
$$N = \mu + \sigma Z$$

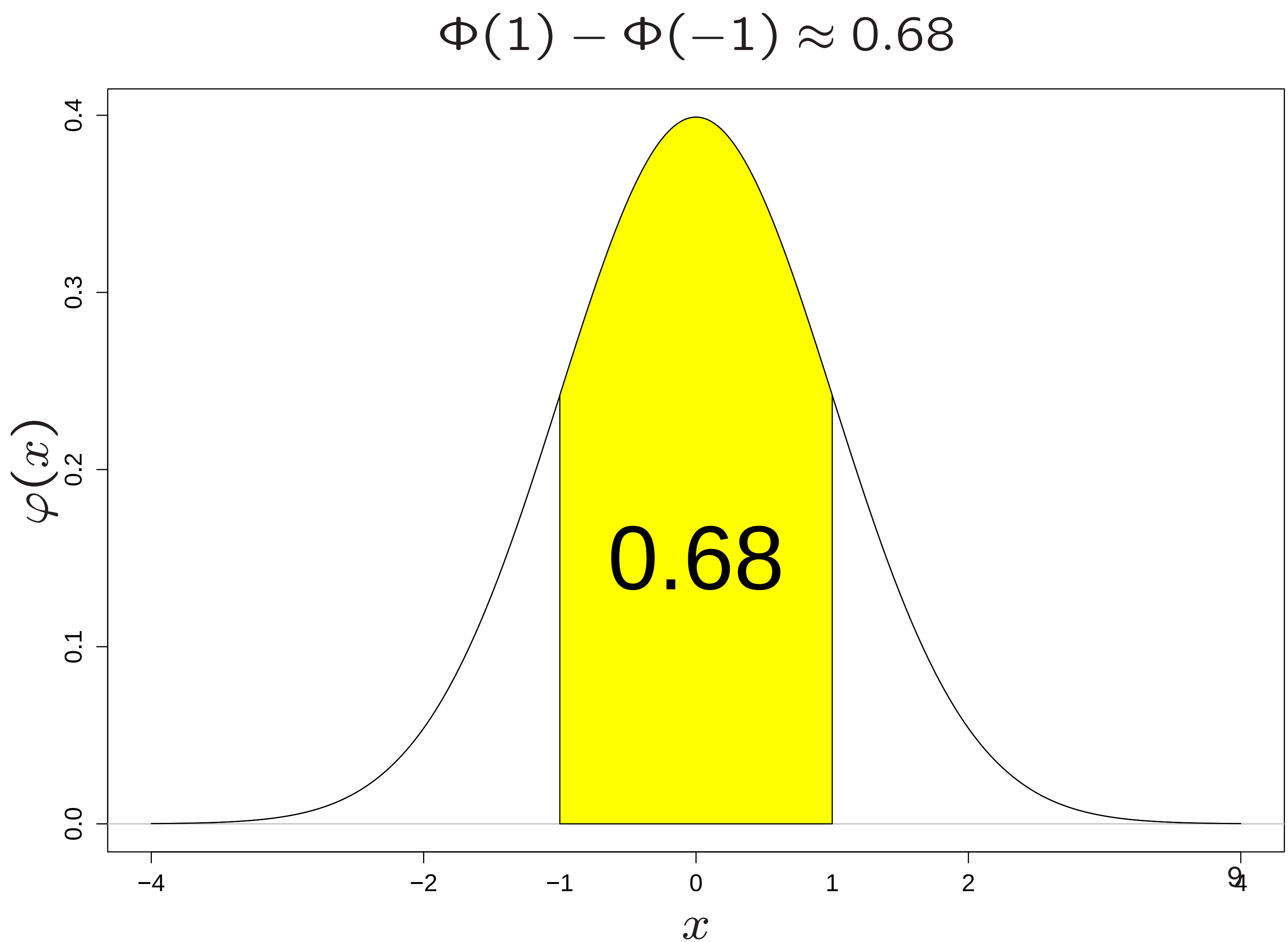
Für sie gilt:

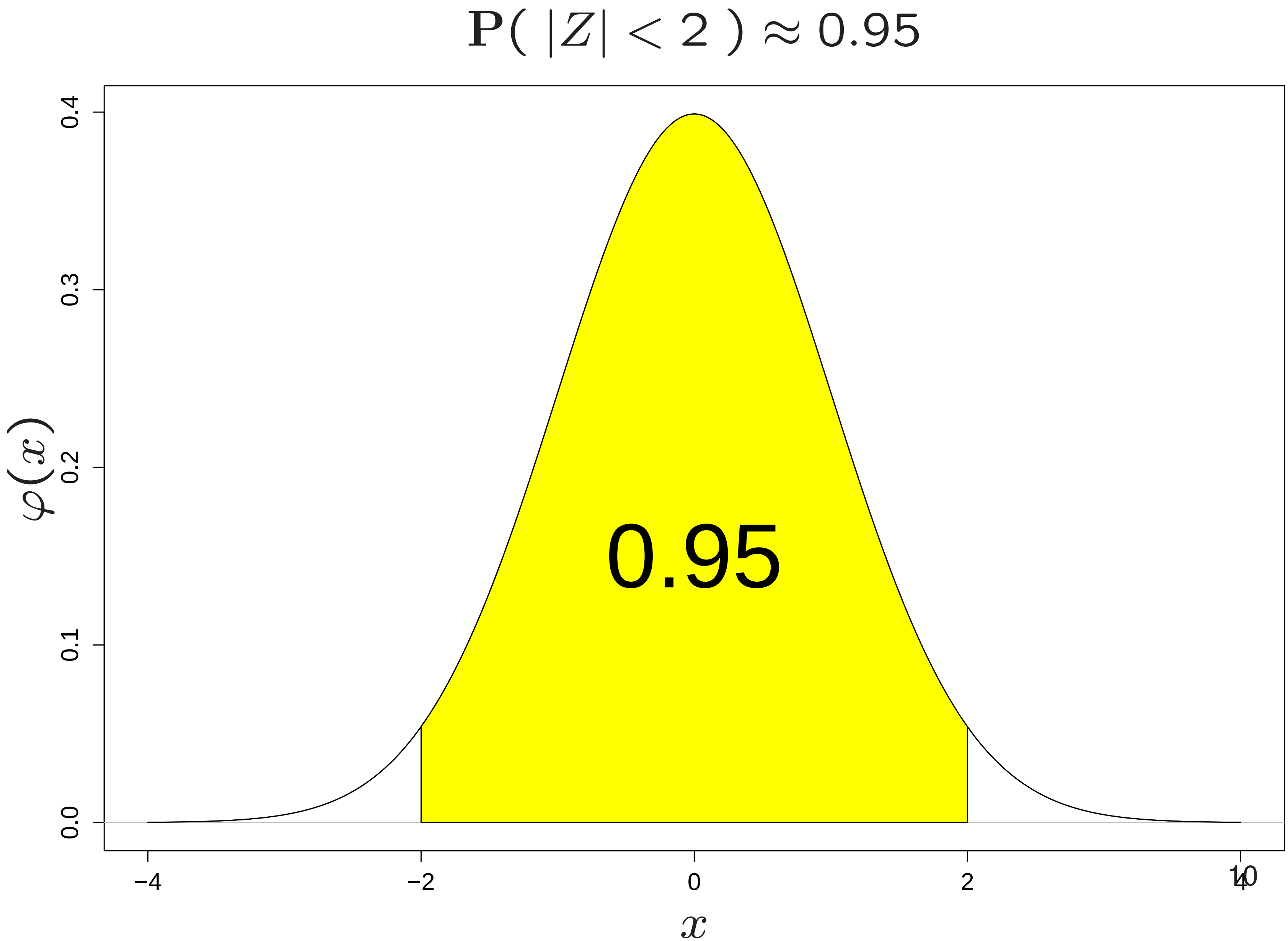
$$\mathbf{E}N = \mu \qquad \sigma_N = \sigma$$


Dichtefunktion φ der Standard-Normalverteilung
$\varphi(x)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
0
2
4
x

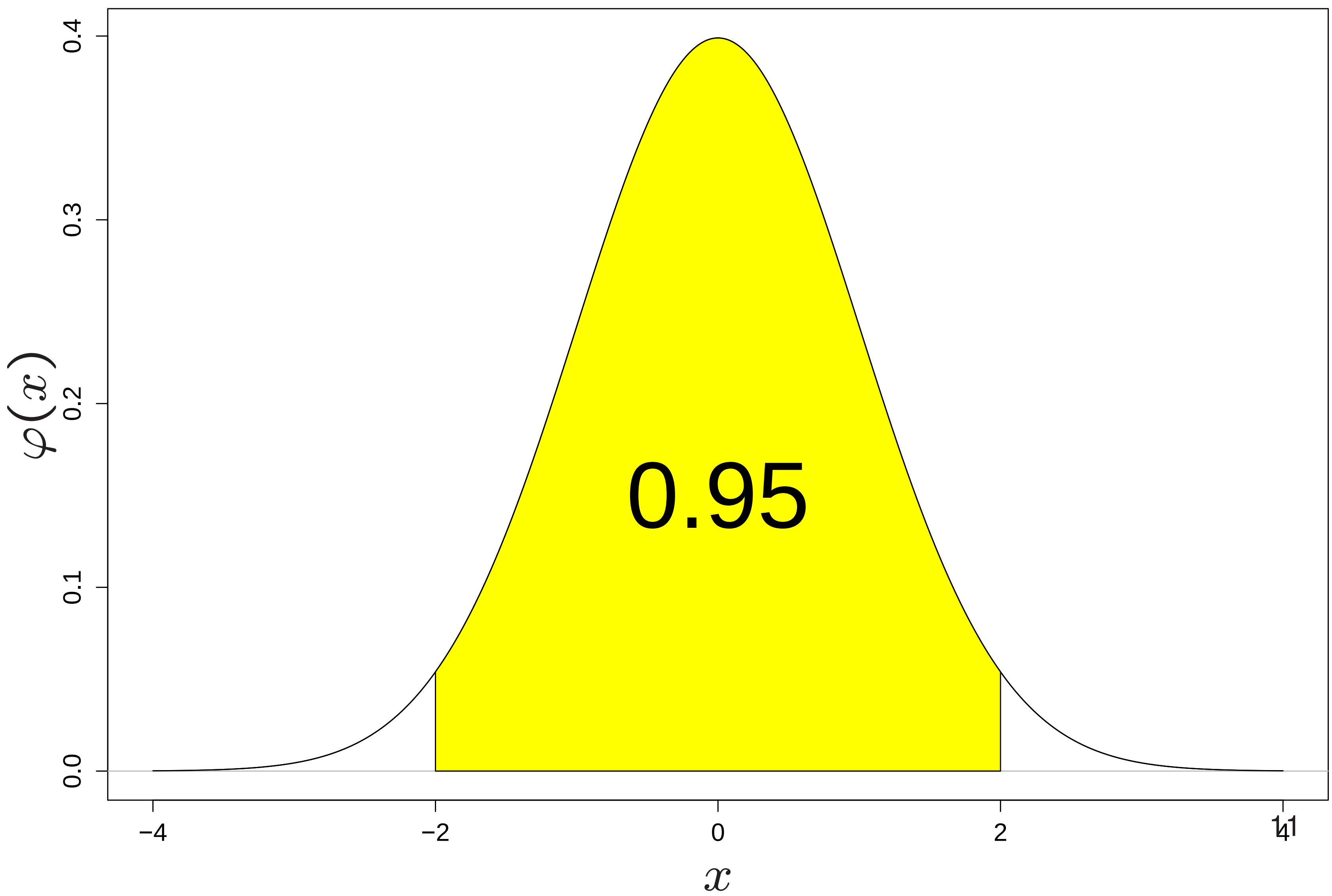
$\mathbf{P}(\,|Z| < 1) \approx 0.68$



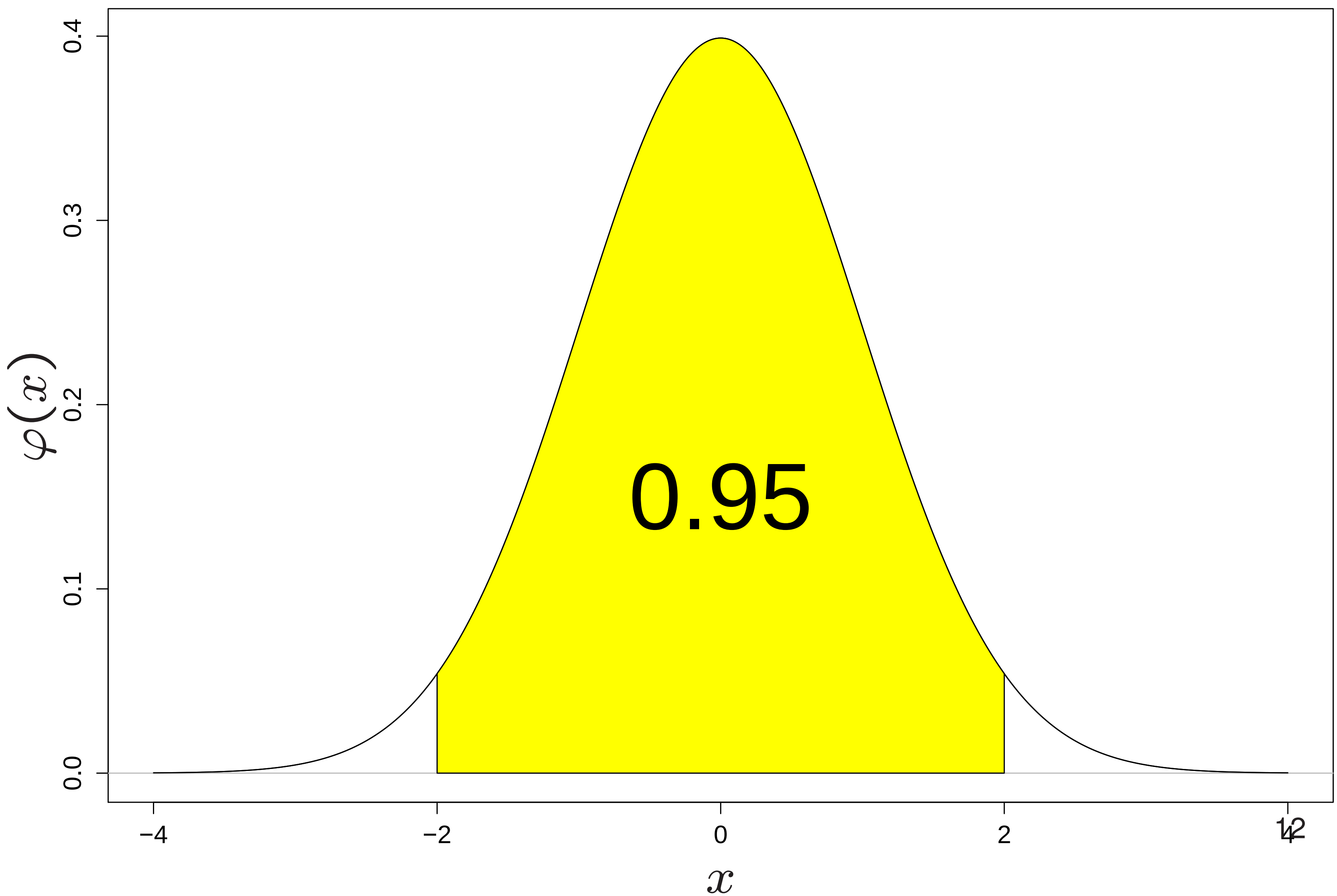

$\Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0.68$
0.68
$\varphi(x)$
x
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
−1
0
1
2
4


P(|Z| < 2) ≈ 0.95
0.95
φ(x)
x
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
0
2
4

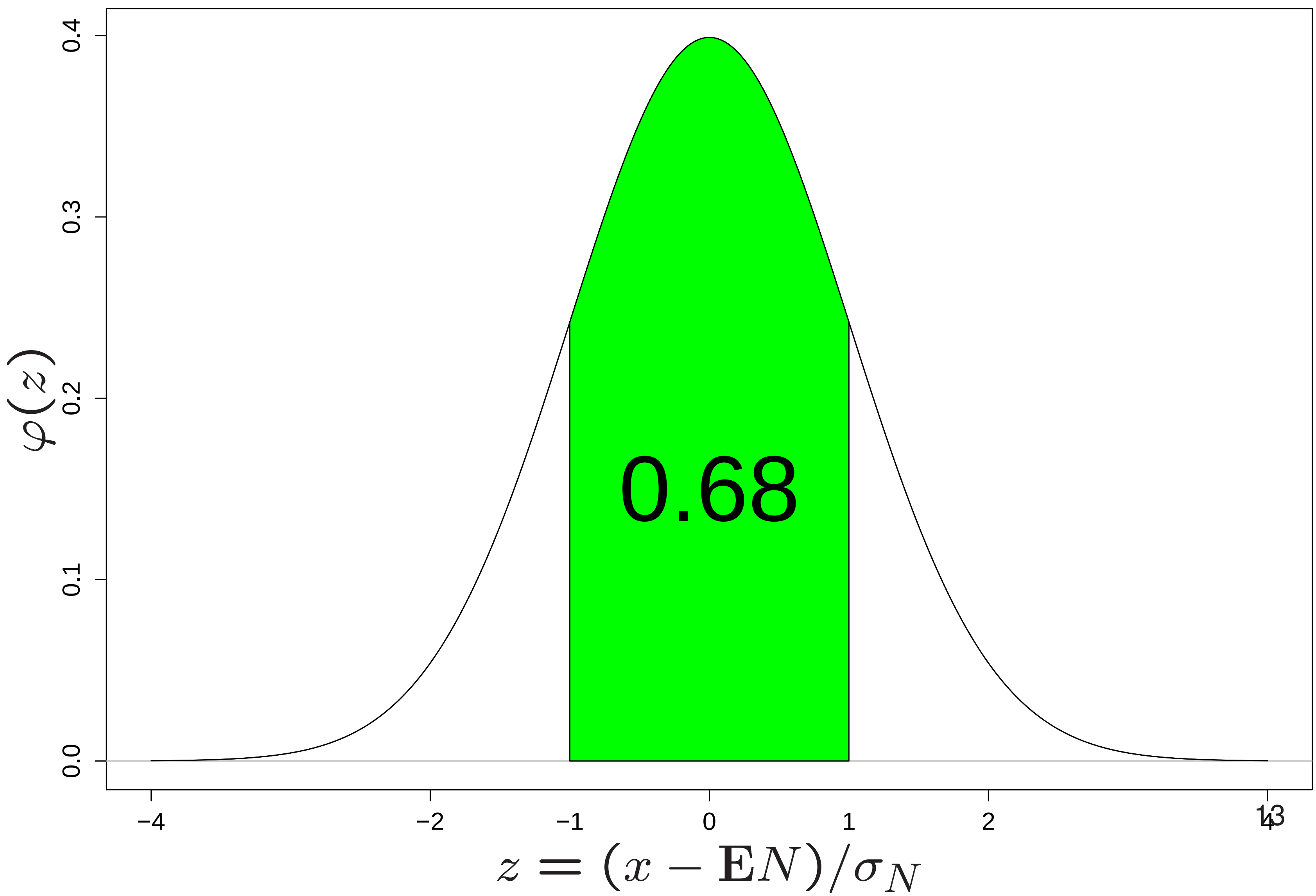
Und für allgemeine normalverteilte Zufallsgrößen N?



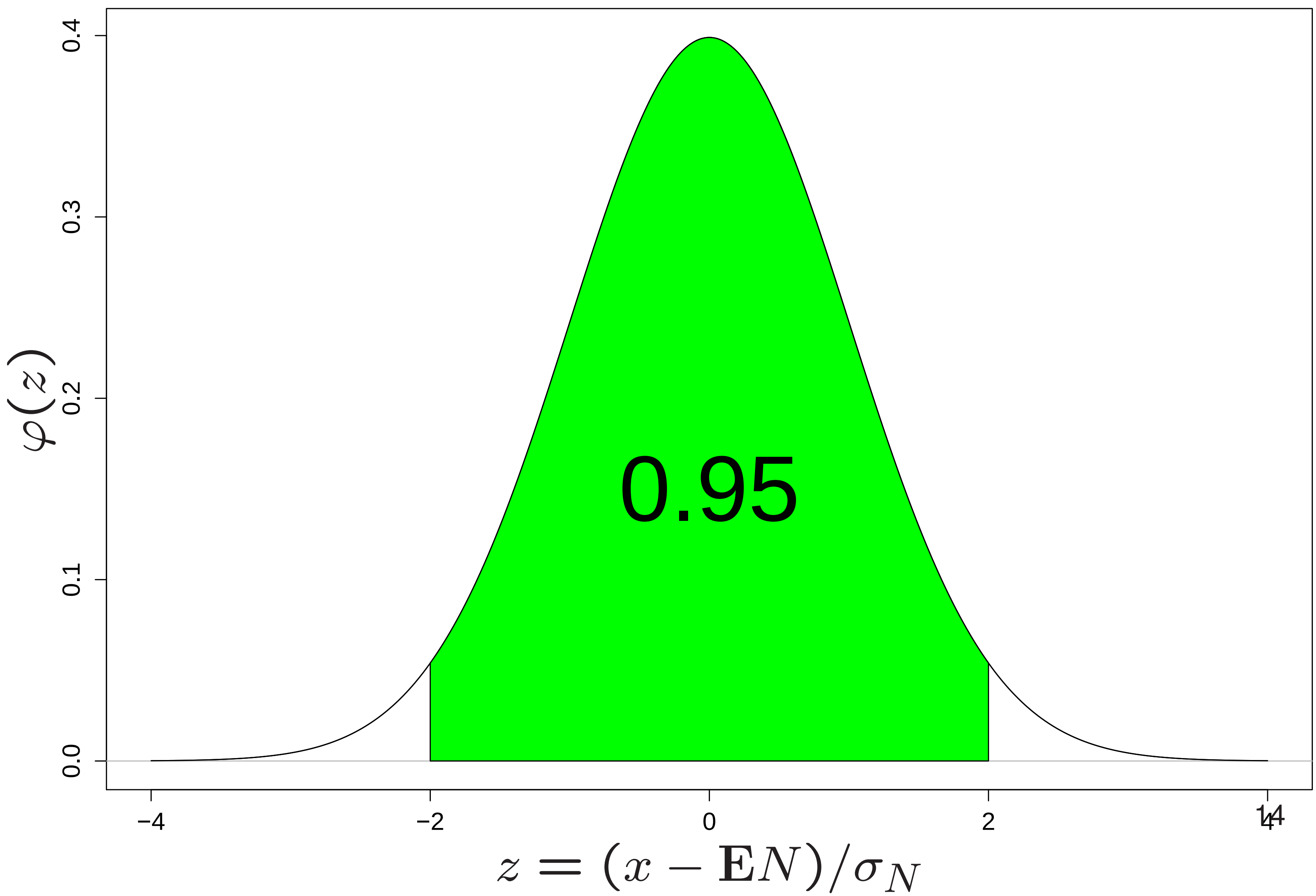
Dasselbe in grün.

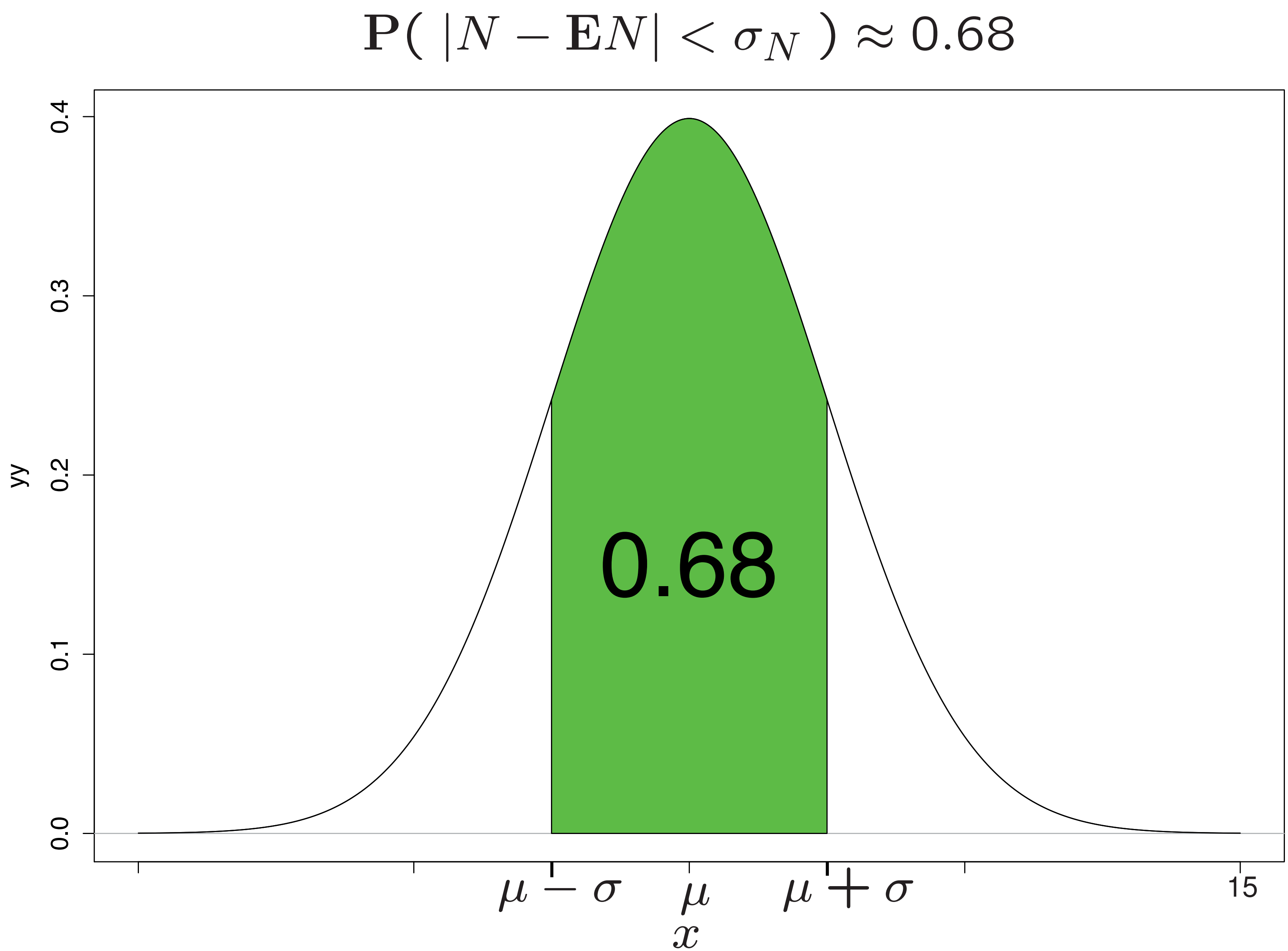


$\mathbf{P}(\ |N - \mathbf{E}N| < \sigma_N\ ) \approx 0.68$

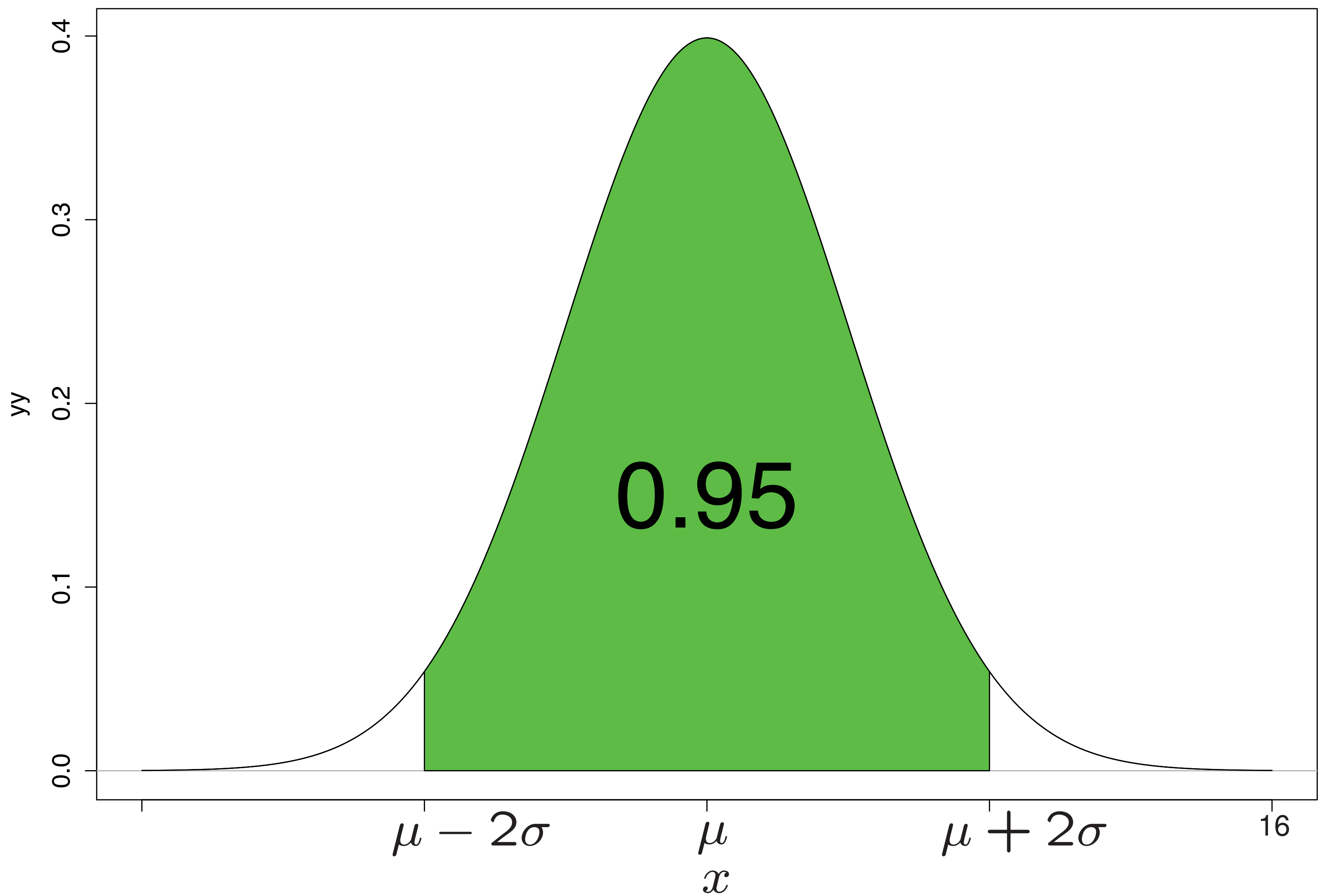


$\mathbf{P}(\ |N - \mathbf{E}N| < 2\sigma_N\ ) \approx 0.95$




$\mathbf{P}(\ |N - \mathbf{E}N| < \sigma_N\ ) \approx 0.68$
0.68
yy
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
$\mu - \sigma$
μ
$\mu + \sigma$
15
x

$$\mathbf{P}(\ |N - \mathbf{E}N| < 2\sigma_N\ ) \approx 0.95$$



Approximation der Gewichte der Binomialverteilung

durch die Dichtefunktion der Normalverteilung

für große $\mu := np$ und $\sigma := \sqrt{npq}$:

Sei X Binomial(n, p)-verteilt. Dann gilt (siehe VL 7a):

$$\mathbf{P}(X = k) \approx \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) = \varphi_{\mu,\sigma^2}(k) \approx \int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \varphi_{\mu,\sigma^2}(a)da$$

$$\mathbf{P}(X \geq b) \approx \int\limits_{b-\frac{1}{2}}^{\infty} \varphi_{\mu,\sigma^2}(a)da = \mathbf{P}(N \geq b - \tfrac{1}{2}), \quad b \in \mathbb{N}_0,$$

für eine N(μ, σ^2)-verteilte ZV'e N.

1. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen mit Dichten

Für diskrete Zufallsvariable

war die Unabhängigkeit von X_1 und X_2

äquivalent zur Produktform der gemeinsamen Gewichte:

$$\rho(a_1, a_2) = \rho_1(a_1)\,\rho_2(a_2).$$

Für Zufallsvariable mit Dichten

ist die Unabhängigkeit von X_1 und X_2

äquivalent zur Produktform der gemeinsamen Dichte:

$$f(a_1, a_2)\,da_1\,da_2 = f_1(a_1)\,da_1\,f_2(a_2)\,da_2$$

Allgemeiner gilt der

Satz über die Unabhängigkeit von Zv'en mit Dichten

$X_1, \ldots, X_n$ seien reellwertige Zufallsvariable,

$f_1, \ldots, f_n$ seien Dichtefunktionen.

Dann sind äquivalent:

(i) $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig,

und X_i hat die Dichte $f_i(a_i)\, da_i, \;\; i = 1, \ldots, n$.

(ii) $(X_1, \ldots, X_n)$ hat die Dichte

$$f_1(a_1) \cdots f_n(a_n)\, da_1 \ldots da_n$$

2. Die uniforme Verteilung auf dem Einheitsquadrat

X_1, X_2 seien unabhängig und uniform verteilt auf $[0, 1]$.

Dann hat (X_1, X_2) die Dichte

$$\mathbf{1}_{[0,1]}(a_1)\, da_1 \ \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(a_2)\, da_2$$

$$= \mathbf{1}_{[0,1]\times[0,1]}(a_1, a_2)\ da_1\, da_2,$$

und ist somit uniform verteilt auf $[0, 1] \times [0, 1]$.

3. Die Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}^2$

(vgl. Buch S. 71)

Zur Erinnerung:

Eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$\boxed{\varphi(a)\,da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}\,da}$$

heißt standard-normalverteilt (auf $\mathbb{R}^1$).

Wichtige Beobachtung:

Z_1, Z_2 seien standard-normalverteilt und unabhängig.

(Z_1, Z_2) hat dann die Dichte

$$\varphi(a_1)\, da_1\; \varphi(a_2)\, da_2$$

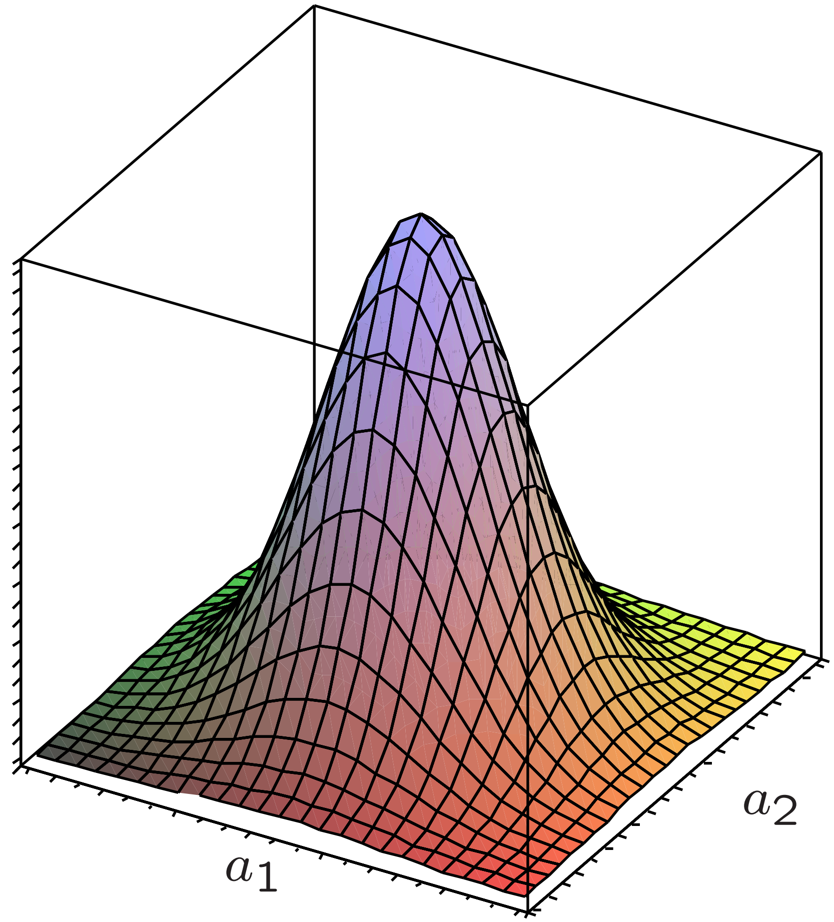
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_1^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_2^2/2}\, da_1 da_2$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2}\, da, \quad a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Die Dichte ist rotationssymmetrtisch!

$$f(a_1, a_2) =$$

$$\frac{1}{2\pi} e^{-(a_1^2 + a_2^2)/2}$$



Definition:

Eine $\mathbb{R}^2$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$f(a)\,da = \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2}\,da, \quad a \in \mathbb{R}^2,$$

heißt **standard-normalverteilt auf** $\mathbb{R}^2$.

4. Eine Folgerung aus der Rotationssymmetrie

(vgl Buch S. 71)

Fassen wir das zufällige Zahlenpaar $Z = (Z_1, Z_2)$ auf

als die (Standard-)Koordinaten

eines zufälligen Vektors

$\vec{Z}$ in $\mathbb{R}^2$,

dann folgt aus der Rotationssymmetrie der Verteilung von $\vec{Z}$:

Für jeden Einheitsvektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ ist die $\vec{u}$-Koordinate von $\vec{Z}$

standard-normalverteilt in $\mathbb{R}$.

Anders gesagt:

Sind Z_1, Z_2 unabhängig und N(0, 1)-verteilt,

dann gilt für jedes Zahlenpaar (τ_1, τ_2) mit $\tau_1^2 + \tau_2^2 = 1$:

$$Y := \tau_1 Z_1 + \tau_2 Z_2 \quad \text{ist} \quad \text{N}(0,1)\text{-verteilt.}$$

(Denn Y ist die Koordinate von $\vec{Z} = Z_1\vec{e}_1 + Z_2\vec{e}_2$

zum Einheitsvektor $\vec{u} := \tau_1\vec{e}_1 + \tau_2\vec{e}_2$.)

Insbesondere ergibt sich:

$$\frac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{2}} \quad \text{ist N}(0,1)\text{-verteilt.}$$

Eine wichtige Folgerung hieraus:

Die Summe von

unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen

ist wieder normalverteilt.

Denn:

$$(\sigma_1 Z_1 + \mu_1) + (\sigma_2 Z_2 + \mu_2) = (\sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2) + (\mu_1 + \mu_2),$$

und

$$\sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} Z_1 + \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} Z_2 \right)$$

ist N$(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$-verteilt.

5. Die Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}^n$

(vgl. Buch S. 71)

In Abschnitt 1 der heutigen Vorlesung formulierten wir den

Satz über die Unabhängigkeit von Zv'en mit Dichten

$X_1, \dots, X_n$ seien reellwertige Zufallsvariable,

$f_1, \dots, f_n$ seien Dichtefunktionen.

Dann sind äquivalent:

(i) $X_1, \dots, X_n$ sind unabhängig,
und X_i hat die Dichte $f_i(a_i)\, da_i$, $\ i = 1, \dots, n$.

(ii) $(X_1, \dots, X_n)$ hat die Dichte

$$f_1(a_1) \cdots f_n(a_n)\, da_1 \dots da_n$$

Dazu passt die folgende Situation:

Sei $Z := (Z_1, \dots, Z_n)$. Dann gilt:

$Z_1, \dots, Z_n$ sind unabhängig und N(0, 1)-verteilt

$$\iff$$

$$\mathbf{P}(Z \in da) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\Big(-\frac{|a|^2}{2}\Big)\, da\ , \quad a \in \mathbb{R}^n\ ,$$

mit $|a|^2 := a_1^2 + \cdots + a_n^2$.

Z heißt dann *standard-normalverteilt auf* $\mathbb{R}^n$.

Die Dichte der Standard-Normalverteilung auf $\mathbb{R}^n$ ist rotationssymmetrisch. Analog zum Fall $n = 2$ gilt deshalb:

Ist $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ standard-normalverteilt auf $\mathbb{R}^n$ und sind $\tau_1, \ldots, \tau_n$ reelle Zahlen mit $\tau_1^2 + \cdots + \tau_n^2 = 1$, dann ist $Y := \tau_1 Z_1 + \cdots + \tau_n Z_n$ N$(0, 1)$-verteilt.

(Denn Y ist die Koordinate von $\vec{Z} = Z_1 \vec{e}_1 + \cdots + Z_n \vec{e}_n$ zum Einheitsvektor $\vec{u} := \tau_1 \vec{e}_1 + \cdots + \tau_n \vec{e}_n$.)

Insbesondere ergibt sich:

$$\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}} \quad \text{ist N}(0, 1)\text{-verteilt.}$$