

Vorlesung 11b

Markovketten

Teil 2

Treffwahrscheinlichkeiten und erwartete Treffzeiten

1. Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades von n Schritten

Zur Erinnerung:

Für eine Markovkette $X = (X_0, X_1, \dots)$
mit Start in a und Übergangsmatrix P

hat man die Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \dots, X_n = a_n) \\ = P(a, a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, a_n). \end{aligned}$$

Speziell für $n = 2$:

$$\mathbf{P}_a(X_1 = b, X_2 = c) = P(a, b)P(b, c).$$

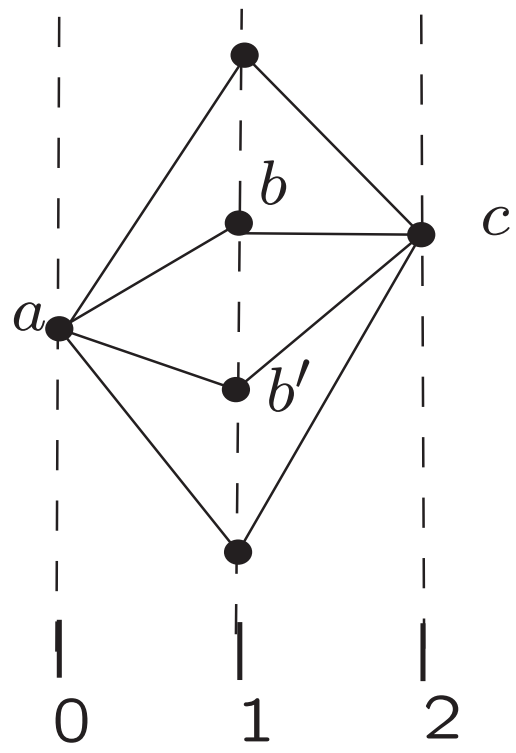
2. Die Zerlegung nach dem ersten Schritt

$$\mathbf{P}_a(X_1 = b, X_2 = c) = P(a, b)P(b, c).$$

Summation über $b \in S$:

$$\mathbf{P}_a(X_2 = c) = \sum_{b \in S} P(a, b)P(b, c)$$

“Zerlegung von zwei Schritten nach dem ersten Schritt”



Und jetzt für n statt 2:

Zerlegung nach dem ersten Schritt.

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \dots, X_n = a_n) \\ &= P(a, a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, a_n) \\ &= P(a, a_1) \mathbf{P}_{a_1}(X_1 = a_2, \dots, X_{n-1} = a_n) \end{aligned}$$

Summation über $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$,
mit b statt a_1 und c statt a_n :

$$\mathbf{P}_a(X_n = c) = \sum_{b \in S} P(a, b) \mathbf{P}_b(X_{n-1} = c) .$$

3. Treffwahrscheinlichkeiten

Eben haben wir die Kette in Gedanken laufen lassen
bis zu einem festen Zeitpunkt n .

Jetzt lassen wir sie laufen, bis sie
erstmal eine bestimmte Menge $C \subset S$ trifft,

und zerlegen wieder nach dem ersten Schritt.

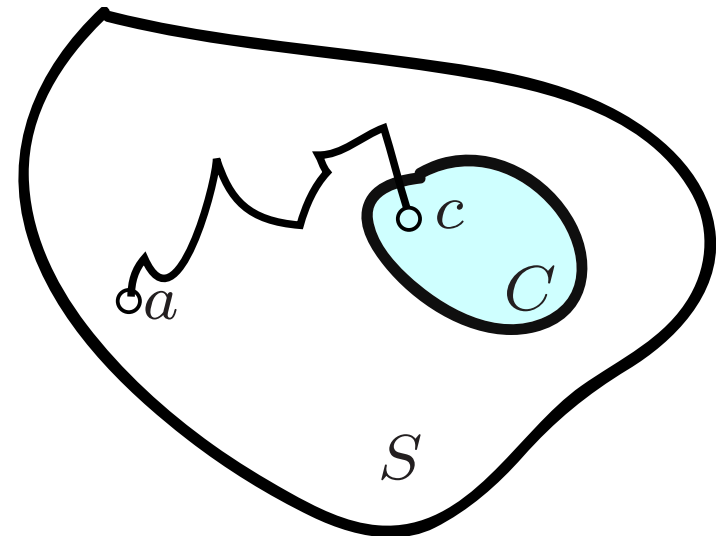
Das eignet sich wunderbar zur Berechnung von
Treffwahrscheinlichkeiten.

Treffwahrscheinlichkeiten

P sei eine Übergangsmatrix auf der Menge S

X sei Markovkette mit Übergangsmatrix P .

$C \subset S$, $c \in C$ seien fest.



Treffwahrscheinlichkeiten

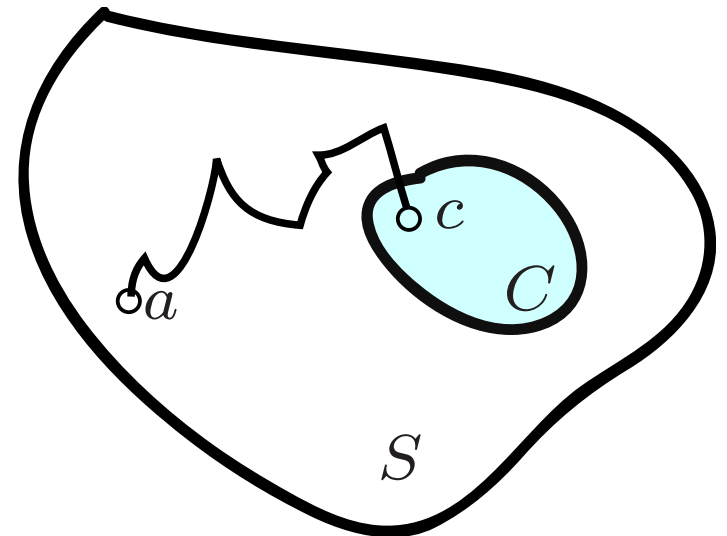
Die Frage:

P sei eine Übergangsmatrix auf der Menge S

X sei Markovkette mit Übergangsmatrix P .

$C \subset S$, $c \in C$ seien fest.

Wie wahrscheinlich ist es,
dass der in $a \in S$ startende Pfad
die Menge C erstmals
im Zustand c trifft?



Treffwahrscheinlichkeiten

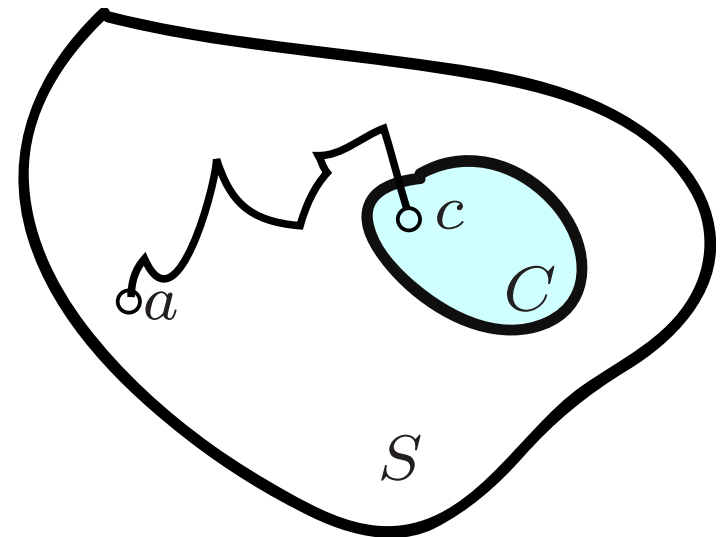
Die Antwort:

Sei $w(a)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Zahlen $w(a)$, $a \in S$, erfüllen das Gleichungssystem

$$\sum_{b \in S} P(a, b) w(b) = w(a)$$

für $a \in S \setminus C$



Treffwahrscheinlichkeiten

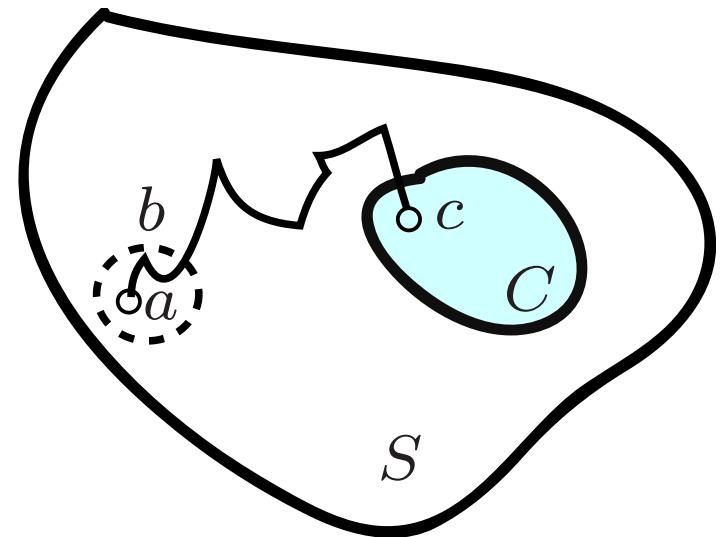
Die Antwort:

Sei $w(a)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Zahlen $w(a)$, $a \in S$, erfüllen das Gleichungssystem

$$\sum_{b \in S} P(a, b) w(b) = w(a)$$

für $a \in S \setminus C$



Treffwahrscheinlichkeiten

Die Antwort:

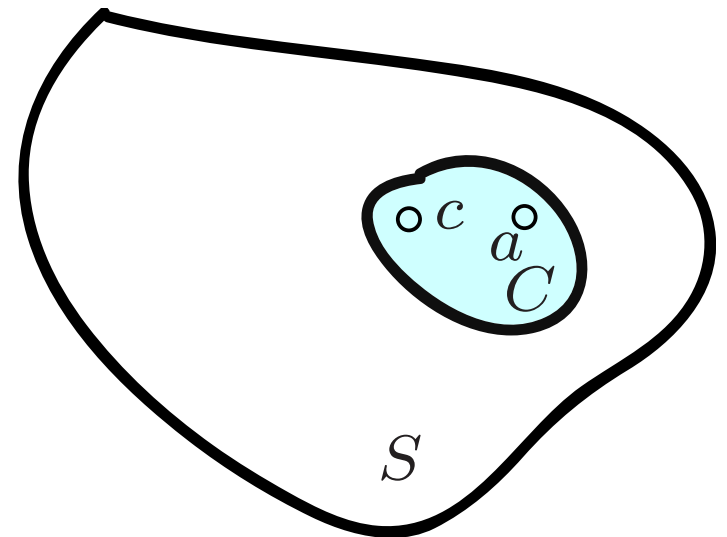
Sei $w(a)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Zahlen $w(a)$, $a \in S$, erfüllen das Gleichungssystem

$$\sum_{b \in S} P(a, b) w(b) = w(a)$$

für $a \in S \setminus C$,

$$w(a) = \delta_{ac} \quad \text{für } a \in C.$$



4. Beispiele

Beispiel A: Gewinn oder Ruin?

Eine einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ starte im Punkt 3.

Mit welcher W'keit erreicht sie den Punkt $c = 10$,
bevor sie zum Nullpunkt kommt?

“Zerlegung nach dem ersten Schritt” und Randbedingungen:

$$w(a) = \frac{1}{2}w(a-1) + \frac{1}{2}w(a+1), \quad a = 1, \dots, c-1,$$
$$w(0) = 0, \quad w(c) = 1.$$

Fazit: Die $w(a)$ liegen auf einer Geraden,

$$w(a) = \beta a + \gamma \quad \text{mit } \gamma = 0, \beta = 1/c.$$

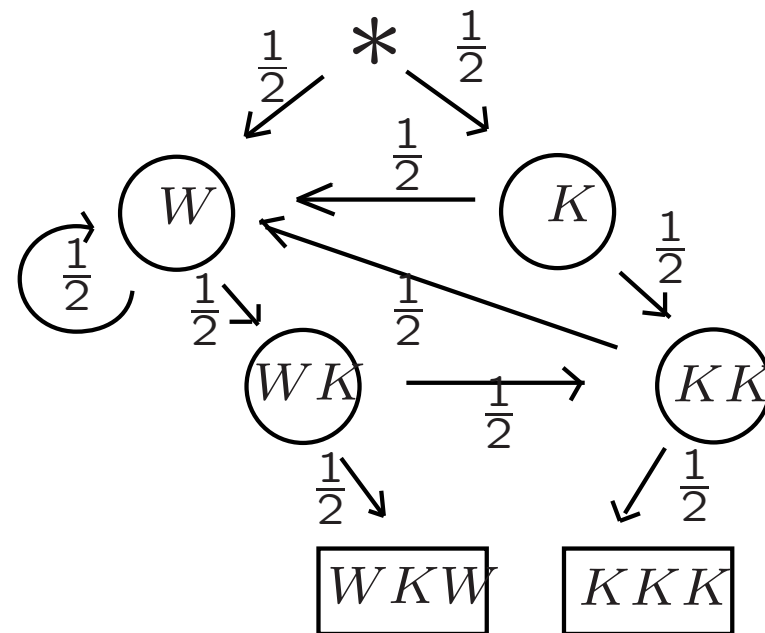
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $3/10$.

Beispiel B

Welches Muster kommt eher?

Mit welcher W'keit kommt beim fairen Münzwurf das Muster KKK früher als das Muster WKW ?

Hier ist ein
“reduzierter Graph”
der relevanten
Zustände
und Übergänge:

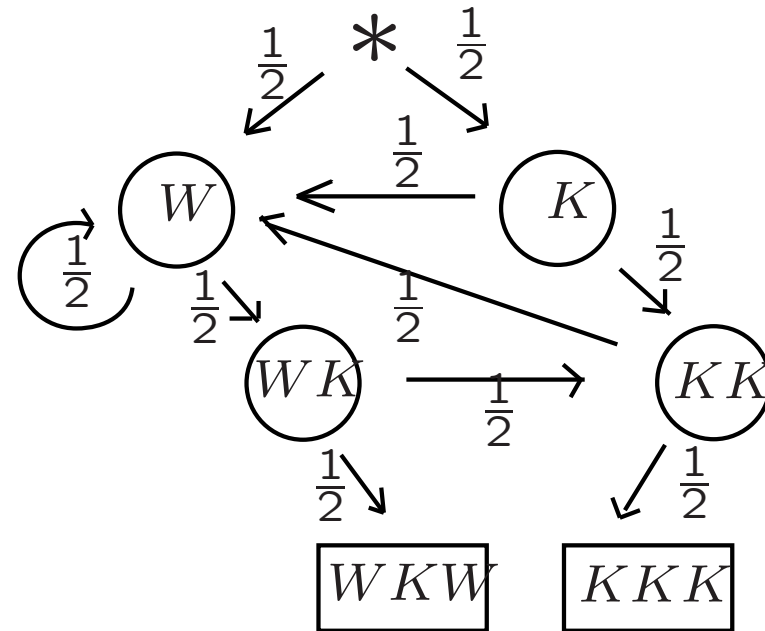


Für $w(a) :=$

$\mathbf{P}_a(\text{Spiel endet in } KKK)$

ergibt sich das

Gleichungssystem



$$w(KK) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}w(W) , \quad w(WK) = \frac{1}{2}w(KK)$$

$$w(K) = \frac{1}{2}w(KK) + \frac{1}{2}w(W) , \quad w(W) = \frac{1}{2}w(WK) + \frac{1}{2}w(W) .$$

und daraus

$$w(W) = \frac{1}{3}, \quad w(K) = \frac{1}{2}, \quad w(*) = \frac{1}{2}w(W) + \frac{1}{2}w(K) = \frac{5}{12} .$$

5. Erwartete Treffzeiten

Sei X eine Markovkette mit Zustandsraum S
und Übergangsmatrix P .

Für eine Teilmenge $C \subset S$ ist
$$T_C := \min\{n : n \geq 0, X_n \in C\}$$

die erste Treffzeit von C .

Es geht um die Berechnung von $\mathbf{E}_a[T_C]$:

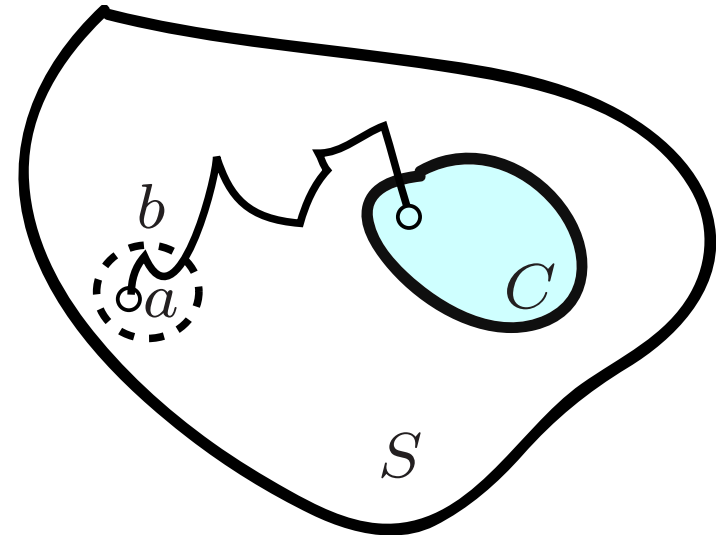
Für $a \notin C$

Zerlegung von $\mathbf{E}_a[T_C]$
nach dem ersten Schritt:

Erst ein Schritt
von a nach b gemäß $P(a, b)$,
dann “Neustart” in b :

$$\mathbf{E}_a[T_C] = 1 + \sum_{b \in S} P(a, b) \mathbf{E}_b[T_C]$$

(Formales Argument hierfür: siehe Buch Seite 106.)

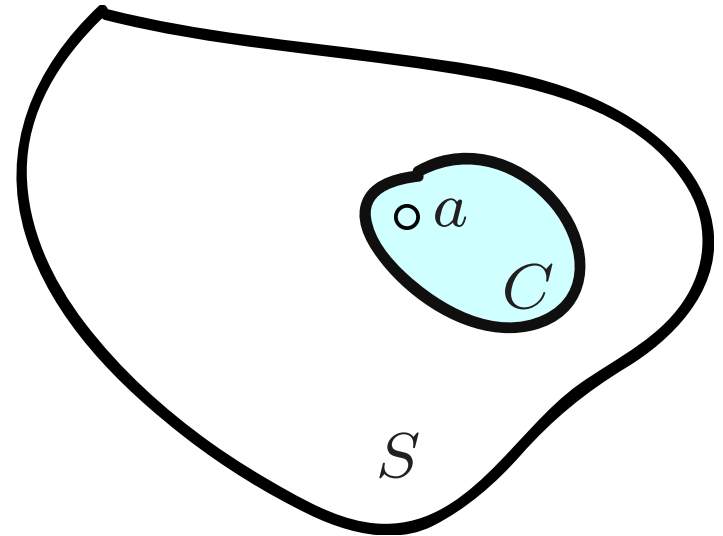


Und für $a \in C$

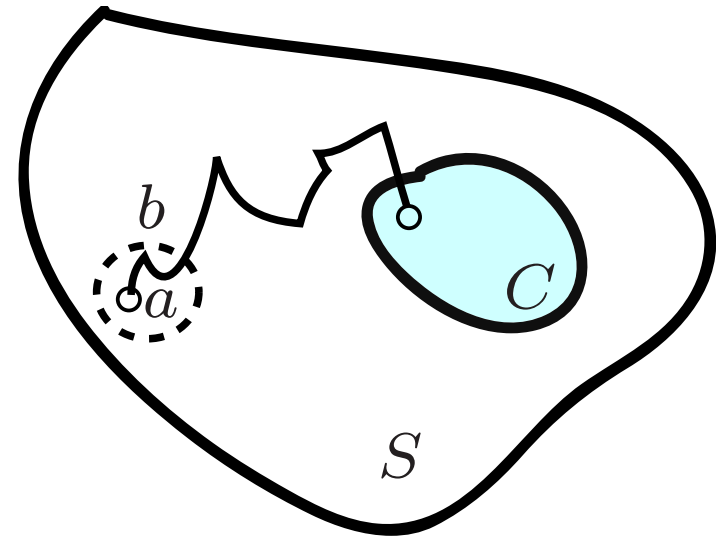
ist $\mathbf{P}_a(T_C = 0) = 1$,

also

$\mathbf{E}_a[T_C] = 0$.



Fazit:



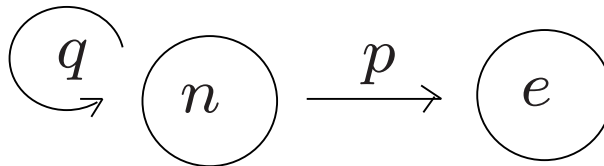
$a \mapsto e(a) := \mathbf{E}_a[T_C]$ erfüllt das Gleichungssystem

$$e(a) = 1 + \sum_{b \in S} P(a, b) e(b) \quad \text{für } a \notin C,$$

$$e(a) = 0 \quad \text{für } a \in C.$$

Beispiel:

Erwartete Zeit bis zum ersten Erfolg.

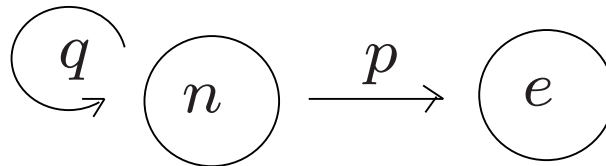


$$\mathbf{E}_n[T_e] = 1 + q\mathbf{E}_n[T_e] + p\mathbf{E}_e[T_e] .$$

Wegen $\mathbf{E}_e[T_e] = 0$ wird dies gelöst durch

Beispiel:

Erwartete Zeit bis zum ersten Erfolg.



$$\mathbf{E}_n[T_e] = 1 + q\mathbf{E}_n[T_e] + p\mathbf{E}_e[T_e] .$$

Wegen $\mathbf{E}_e[T_e] = 0$ wird dies gelöst durch

$$\mathbf{E}_n[T_e] = 1/p.$$