Vorlesung 7b

Unabhängigkeit

Teil 2: Dichten

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen mit Dichten

Für Zufallsvariable mit Dichten

ist die Unabhängigkeit von X_1 und X_2

äquivalent zur Produktform der gemeinsamen Dichte:

$$f(a_1, a_2)\, da_1\, da_2 = f_1(a_1)\, da_1\, f_2(a_2)\, da_2$$

Allgemeiner gilt der

Satz über die Unabhängigkeit von Zv'en mit Dichten

$X_1, \ldots, X_n$ seien reellwertige Zufallsvariable,

$f_1, \ldots, f_n$ seien Dichtefunktionen.

Dann sind äquivalent:

(i) $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig,

und X_i hat die Dichte $f_i(a_i)\, da_i, \;\; i = 1, \ldots, n$.

(ii) $(X_1, \ldots, X_n)$ hat die Dichte

$$f_1(a_1) \cdots f_n(a_n)\, da_1 \ldots da_n$$

Beispiele:

1. Uniforme Verteilung auf dem Einheitsquadrat:

X_1, X_2 seien unabhängig und uniform verteilt auf $[0,1]$.

Dann hat (X_1, X_2) die Dichte

$$\mathbf{1}_{[0,1]}(a_1)\, da_1 \;\cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(a_2)\, da_2$$

$$= \mathbf{1}_{[0,1]\times[0,1]}(a_1, a_2)\; da_1\, da_2,$$

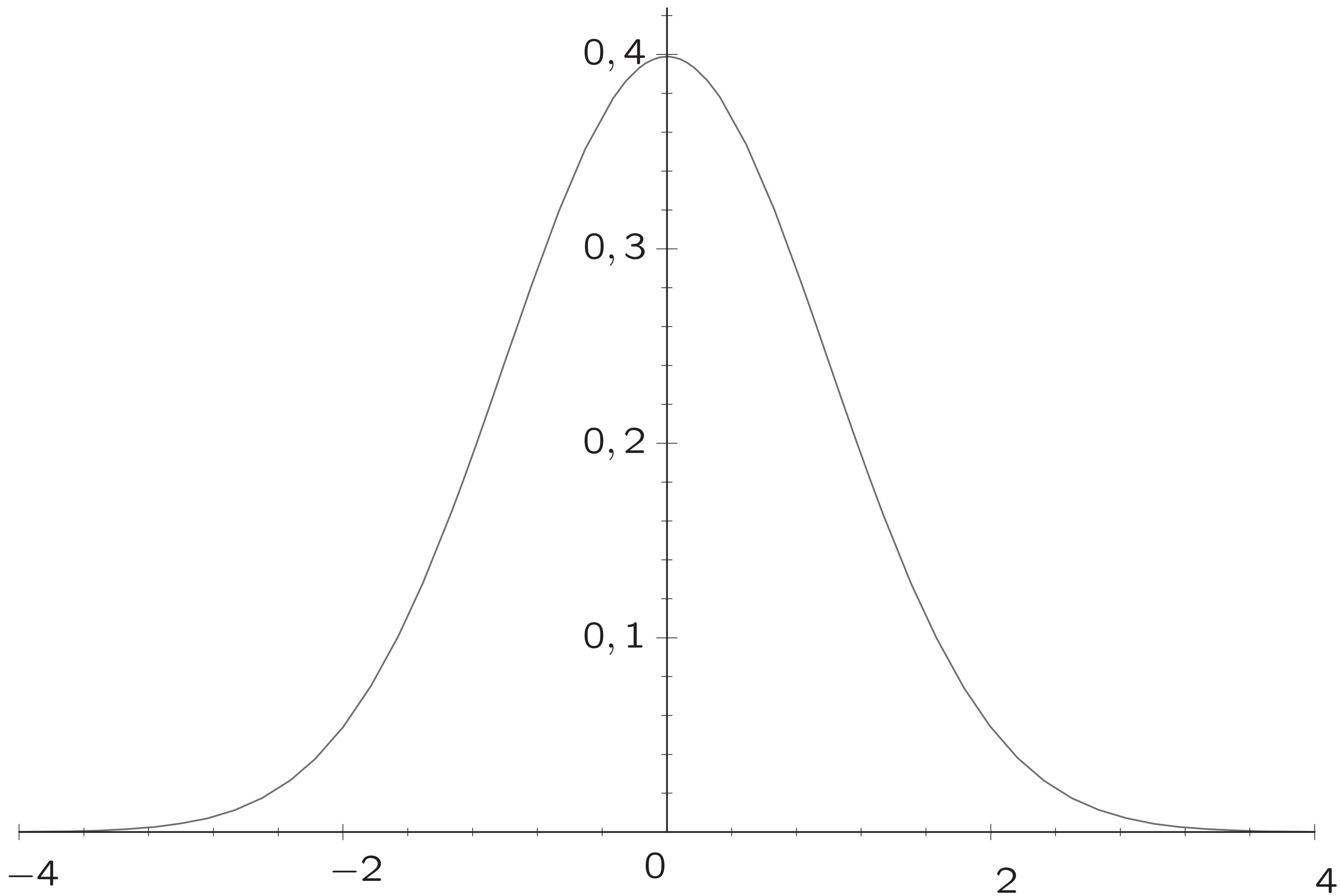
und ist somit uniform verteilt auf $[0,1] \times [0,1]$.

2. Standard-Normalverteilung:

Eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$\boxed{\varphi(a)\,da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}\,da}$$

heißt standard-normalverteilt.



0, 4
0, 3
0, 2
0, 1
−4
−2
0
2
4

Wichtige Beobachtung:

Z_1, Z_2 seien standard-normalverteilt und unabhängig.

(Z_1, Z_2) hat dann die Dichte

$$\varphi(a_1)\, da_1\, \varphi(a_2)\, da_2$$

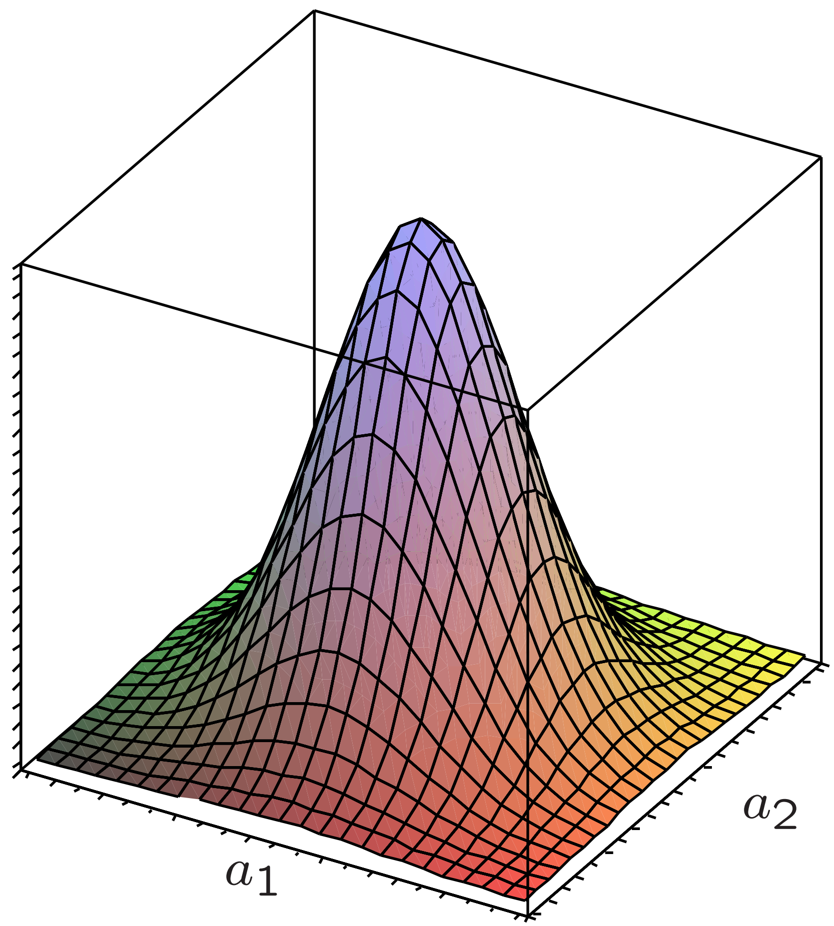
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_1^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_2^2/2}\, da_1 da_2$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2}\, da, \quad a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Die Dichte ist rotationssymmetrtisch!

$$f(a_1, a_2) =$$

$$\frac{1}{2\pi} e^{-(a_1^2 + a_2^2)/2}$$



Definition:

Eine $\mathbb{R}^2$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$f(a)\,da = \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2}\,da, \quad a \in \mathbb{R}^2,$$

heißt standard-normalverteilt auf $\mathbb{R}^2$.

Fassen wir das zufällige Zahlenpaar $Z = (Z_1, Z_2)$ auf

als die (Standard-)Koordinaten

eines zufälligen Vektors

$\vec{Z}$ in $\mathbb{R}^2$,

dann folgt aus der Rotationsinvarianz der Verteilung von $\vec{Z}$:

Für jeden Einheitsvektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ ist die $\vec{u}$-Koordinate von $\vec{Z}$

standard-normalverteilt in $\mathbb{R}$.

Anders gesagt:

Sind Z_1, Z_2 unabhängig und N(0, 1)-verteilt,

dann gilt für jedes Zahlenpaar (τ_1, τ_2) mit $\tau_1^2 + \tau_2^2 = 1$:

$\tau_1 Z_1 + \tau_2 Z_2$ ist N(0, 1)-verteilt.

Satz über die Unabhängigkeit von Zv'en mit Dichten

$X_1, \ldots, X_n$ seien reellwertige Zufallsvariable,

$f_1, \ldots, f_n$ seien Dichtefunktionen.

Dann sind äquivalent:

(i) $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig,

und X_i hat die Dichte $f_i(a_i)\, da_i, \;\; i = 1, \ldots, n$.

(ii) $(X_1, \ldots, X_n)$ hat die Dichte

$$f_1(a_1) \cdots f_n(a_n)\, da_1 \ldots da_n$$

Beispiel: Multivariate Standard-Normalverteilung.

Sei $Z := (Z_1, \ldots, Z_n)$. Dann gilt:

$Z_1, \ldots, Z_n$ sind unabhängig und N(0, 1)-verteilt

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbf{P}(Z \in da) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\Big(-\frac{|a|^2}{2}\Big)\, da\ , \quad a \in \mathbb{R}^n\ ,$$

mit $|a|^2 := a_1^2 + \cdots + a_n^2$.

Z heißt dann *standard-normalverteilt auf* $\mathbb{R}^n$.

Analog zum Fall $n = 2$ gilt:

Ist $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ standard-normalverteilt auf $\mathbb{R}^n$
und sind $\tau_1, \ldots, \tau_n$ reelle Zahlen mit $\tau_1^2 + \cdots + \tau_n^2 = 1$,
dann ist $Y := \tau_1 Z_1 + \cdots + \tau_n Z_n$ N$(0, 1)$-verteilt.

(Y ist die Koordinate von $\vec{Z} = Z_1 \vec{e}_1 + \cdots + Z_n \vec{e}_n$
zum Einheitsvektor $\vec{u} := \tau_1 \vec{e}_1 + \cdots + \tau_n \vec{e}_n$.)

Insbesondere ergibt sich:

$$\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}} \quad \text{ist N}(0, 1)\text{-verteilt.}$$

Unabhängigkeit und Unkorreliertheit.

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige reellwertige Zufallsvariable mit endlicher Varianz.

Dann gilt:

Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig,
dann sind sie auch paarweise unkorreliert.

Denn für $i \neq j$ folgt aus der Produktformel für E'werte:

$\mathbf{E}[X_i X_j] = \mathbf{E}[X_i]\mathbf{E}[X_j]$, also $\mathbf{Cov}[X_i, X_j] = 0$.

In Vorlesung 3a hatten wir den Erwartungswert “erlebt”,

und zwar in Gestalt des Mittelwertes

$$M_n := \frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \qquad (n \text{ groß})$$

von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen

$$X_1, \ldots, X_n,$$

mit großem n.

Zur Erinnerung sind hier die damaligen Folien:

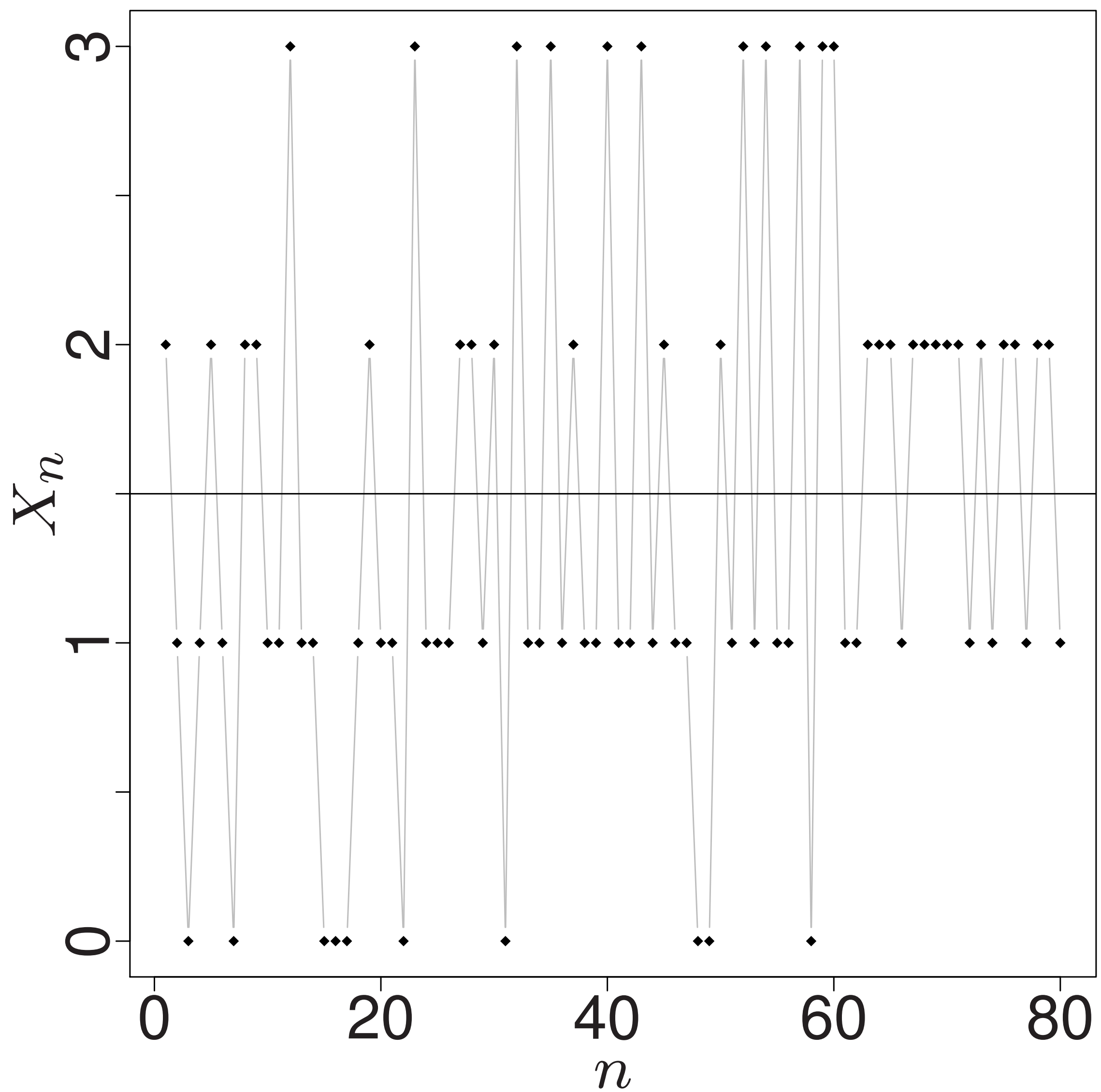
Eine faire Münze wird dreimal geworfen.

X := Anzahl der Erfolge.

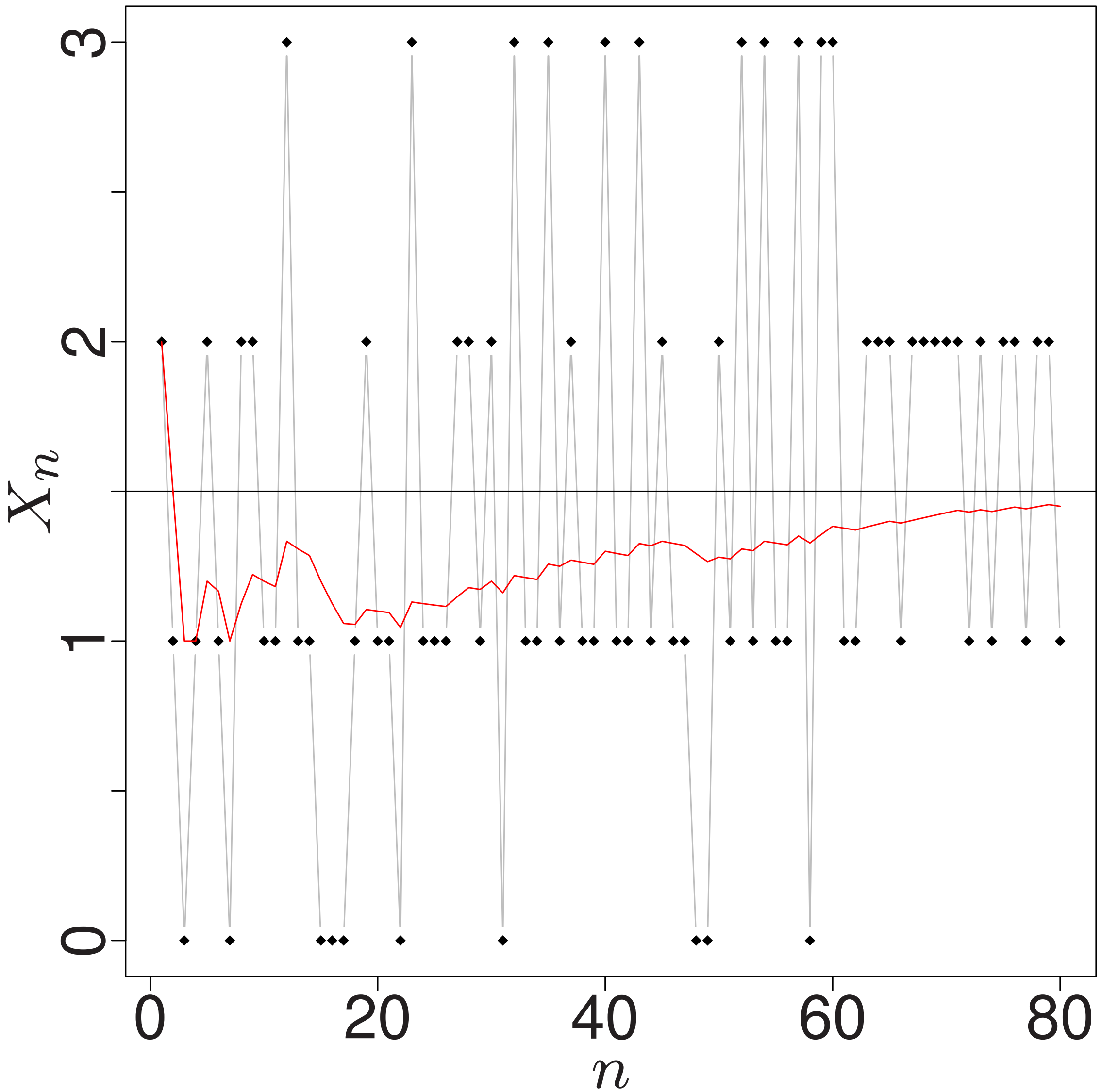
“Wie erlebt man den Erwartungswert?”

Durch wiederholtes Werfen der drei Münzen!

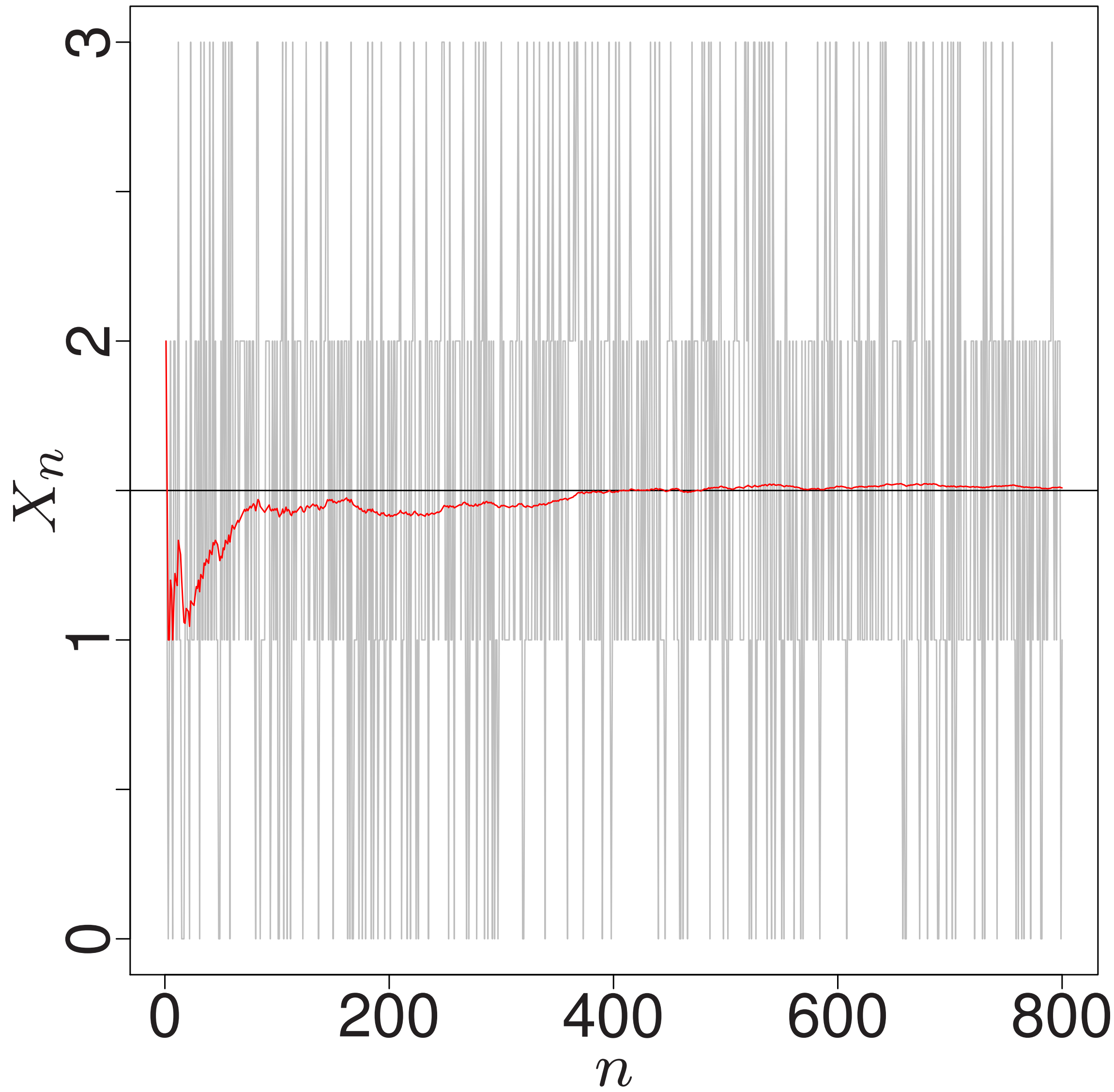
80 Wiederholungen: $X_1, X_2, \ldots, X_{80}$



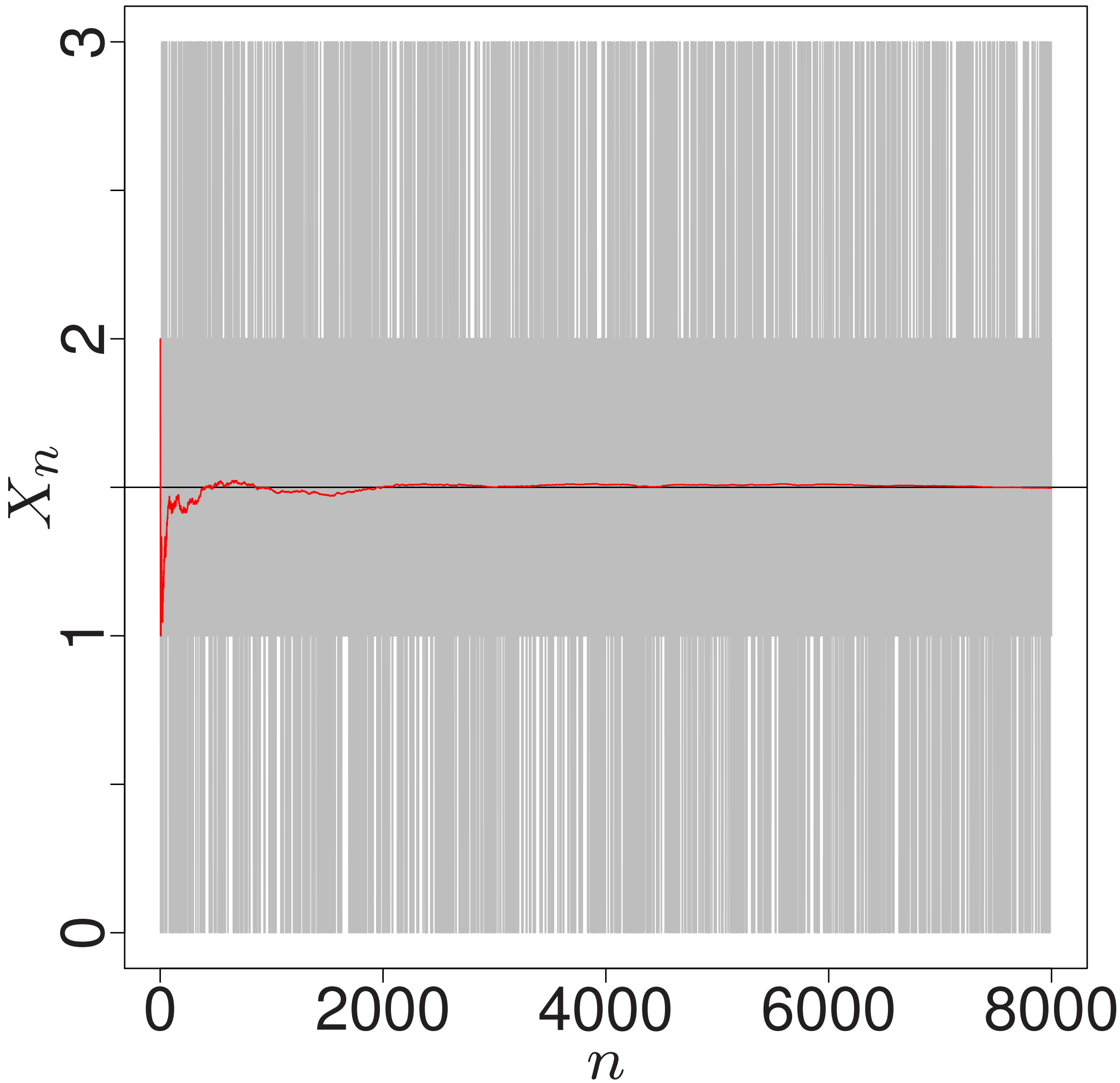
$$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\,/\,n$$

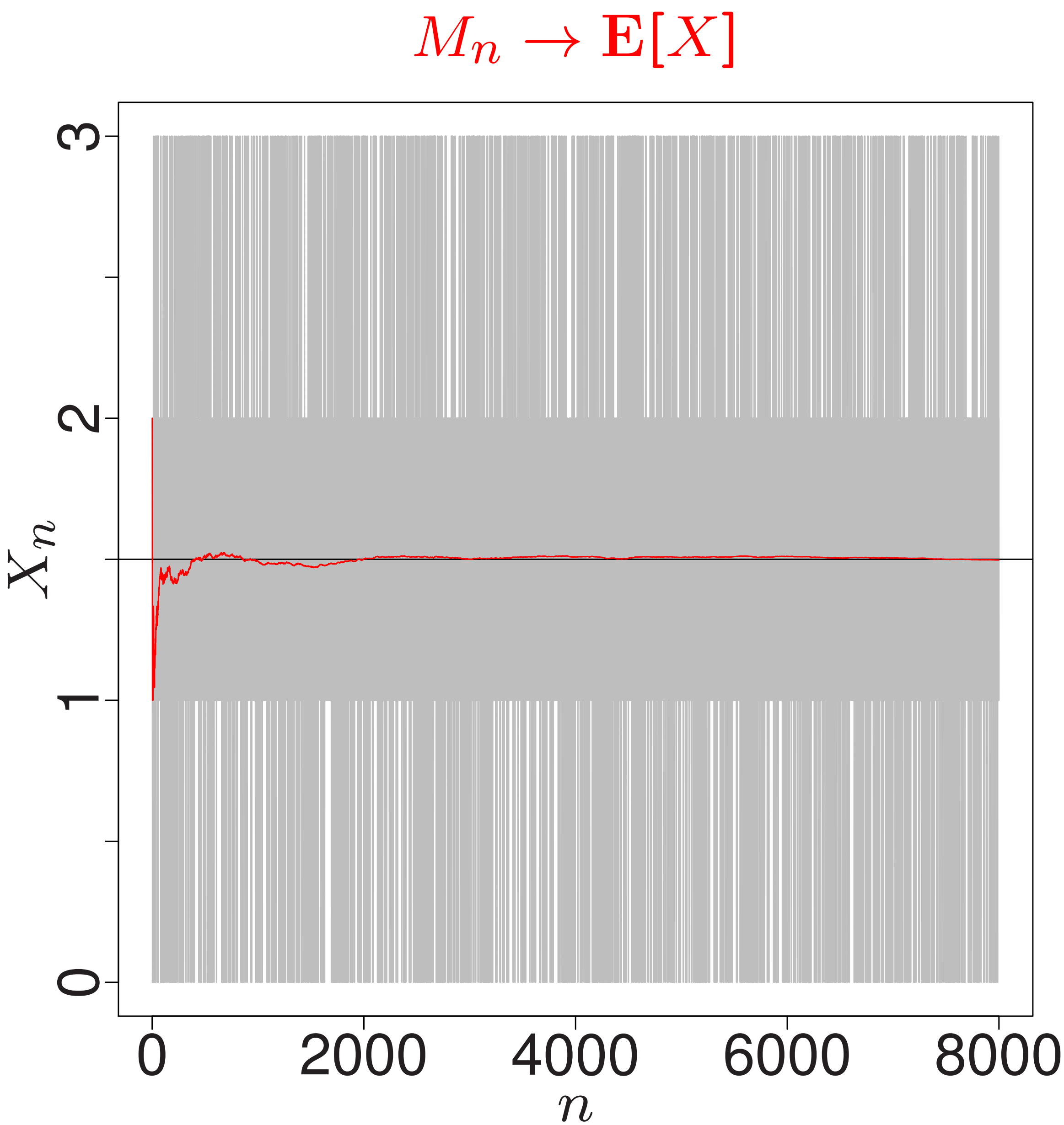


$$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) / n$$



$$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\,/\,n$$




$M_n \to \mathbf{E}[X]$
0
1
2
3
X_n
0
2000
4000
6000
8000
n

Das Gesetz der grossen Zahlen

Sei X eine Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mathbf{E}[X]$.

DAS GESETZ DER GROSSEN ZAHLEN

Sei X eine Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mathbf{E}[X]$.

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Kopien von X.

Dann gilt

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \to \mathbf{E}[X]$$

Das Gesetz der grossen Zahlen

Sei X eine Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mathbf{E}[X]$.

Seien $X_1, X_2, ...$ unabhängige Kopien von X.

Dann gilt

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \to \mathbf{E}[X]$$

Zu klären

Das Gesetz der grossen Zahlen

Sei X eine Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mathbf{E}[X]$.

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Kopien von X.

Dann gilt

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbf{E}[X]$$

Zu klären

1. Was heißt „unabhängig“?

2. Was heißt „ $\to$ “?

Dafür sind wir jetzt gerüstet.

Den Begriff der (stochastischen) Unabhängigkeit haben wir diskutiert.

Wir wissen auch schon: Aus der Unabhängigkeit folgt die paarweise Unkorreliertheit, also (mit $\sigma^2 := \mathbf{Var} X_i$)

$$\mathbf{Var}\left[\frac{X_1 + ... + X_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \to \infty$$

Schwaches Gesetz der Großen Zahlen

(Buch S. 74)

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ seien reellwertig, identisch verteilt mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz, und sie seien paarweise unkorreliert.

Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0 \,.$$

Beweis: Wir schreiben

$$M_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}, \sigma^2 := \mathbf{Var}[X_i].$$

Wegen der Linearität des Erwartungswertes ist $\mathbf{E}[M_n] = \mu$.

Mit der Chebyshev-Ungleichung folgt für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\mathbf{P}(|M_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \tfrac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{Var}[M_n].$$

Wie wir zwei Folien vorher festgestellt haben,

konvergiert $\mathbf{Var}[M_n]$ für $n \to \infty$ gegen 0. $\square$

Pafnuty Lvovich Chebyshev, 1821-1894

$$\mathbf{P}(\ |X - \mathbf{E}X| > k\sigma\ ) \leq \frac{1}{k^2}$$

Im Schwache Gesetz der Großen Zahlen

begegnen wir der sogenannten

stochastischen Konvergenz von Zufallsvariablen:

Definition: Seien $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ Zufallsvariable. Man sagt

Y_n **konvergiert** für $n \to \infty$ **stochastisch** gegen Y,

wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\mathbf{P}(|Y_n - Y| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Das Schwache Gesetz kompakt formuliert:

Unter den angegebenen Voraussetzungen

(paarweise Unkorreliertheit, gleicher Erwartungswert, gleiche Varianz)

konvergiert die Folge der Stichprobenmittel

stochastisch gegen den Erwartungswert.

Déjá vu:

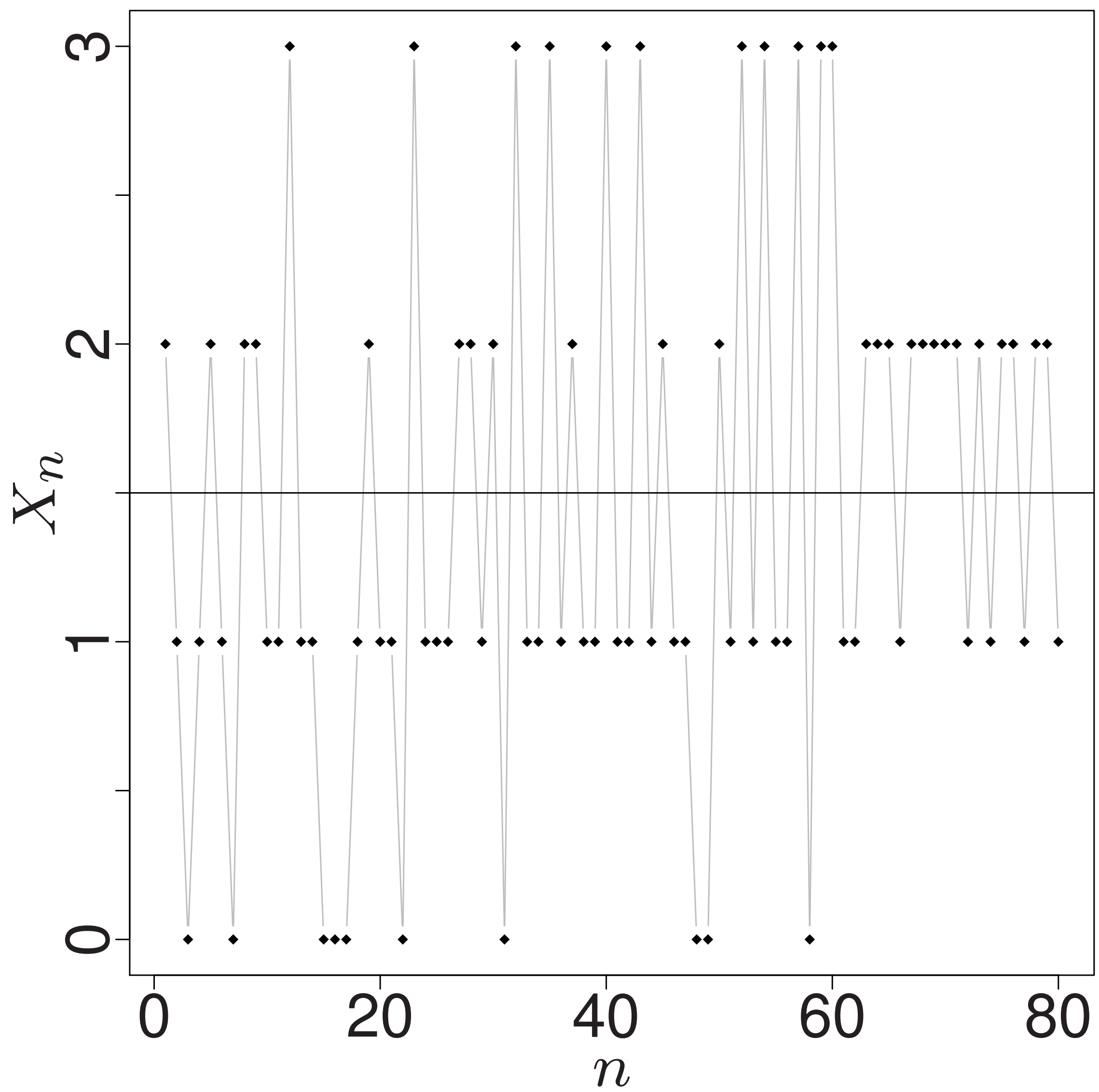
Eine faire Münze wird dreimal geworfen.

X := Anzahl der Erfolge.

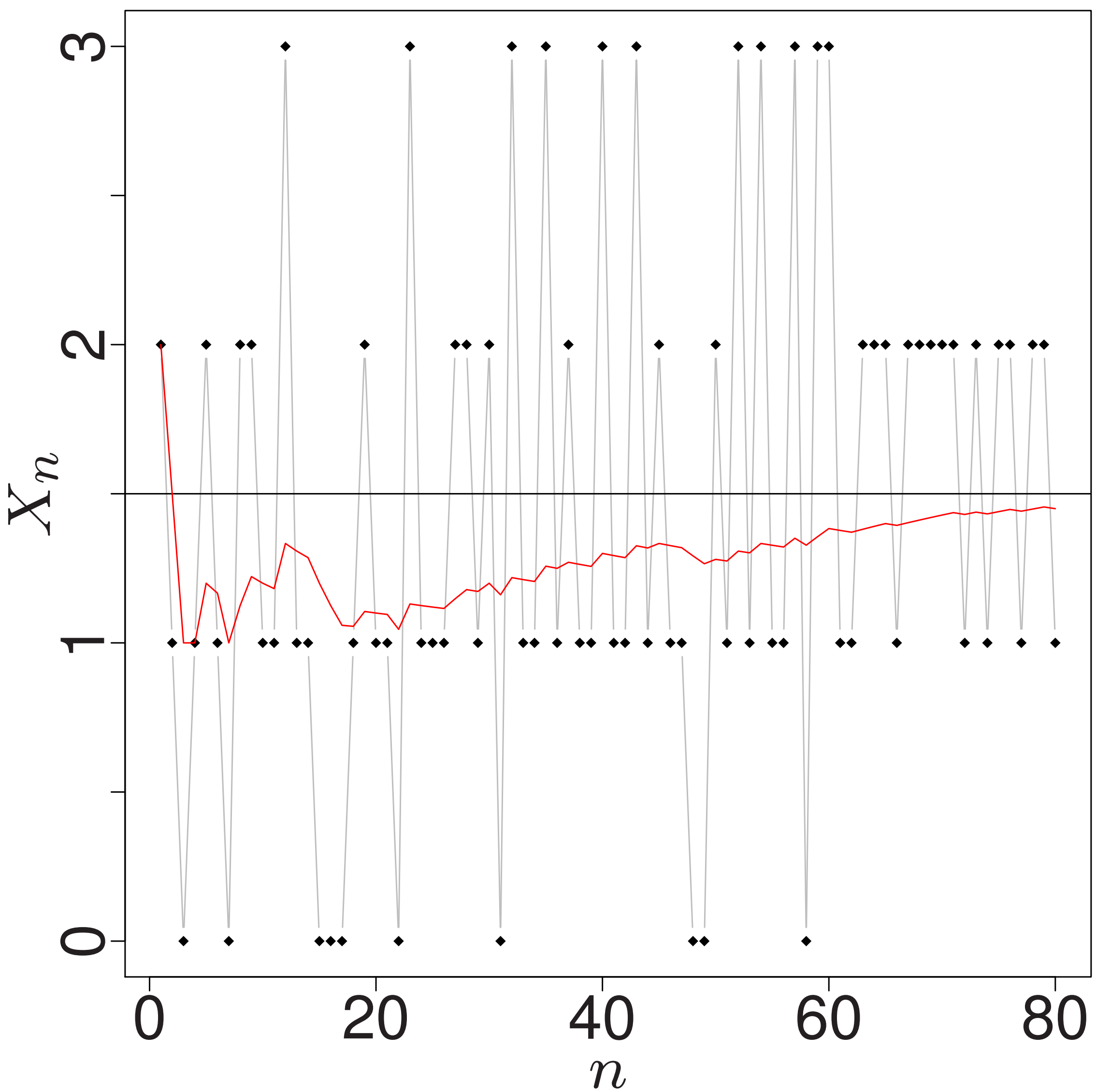
"Wie erlebt man den Erwartungswert?"

Durch wiederholtes Werfen der drei Münzen!

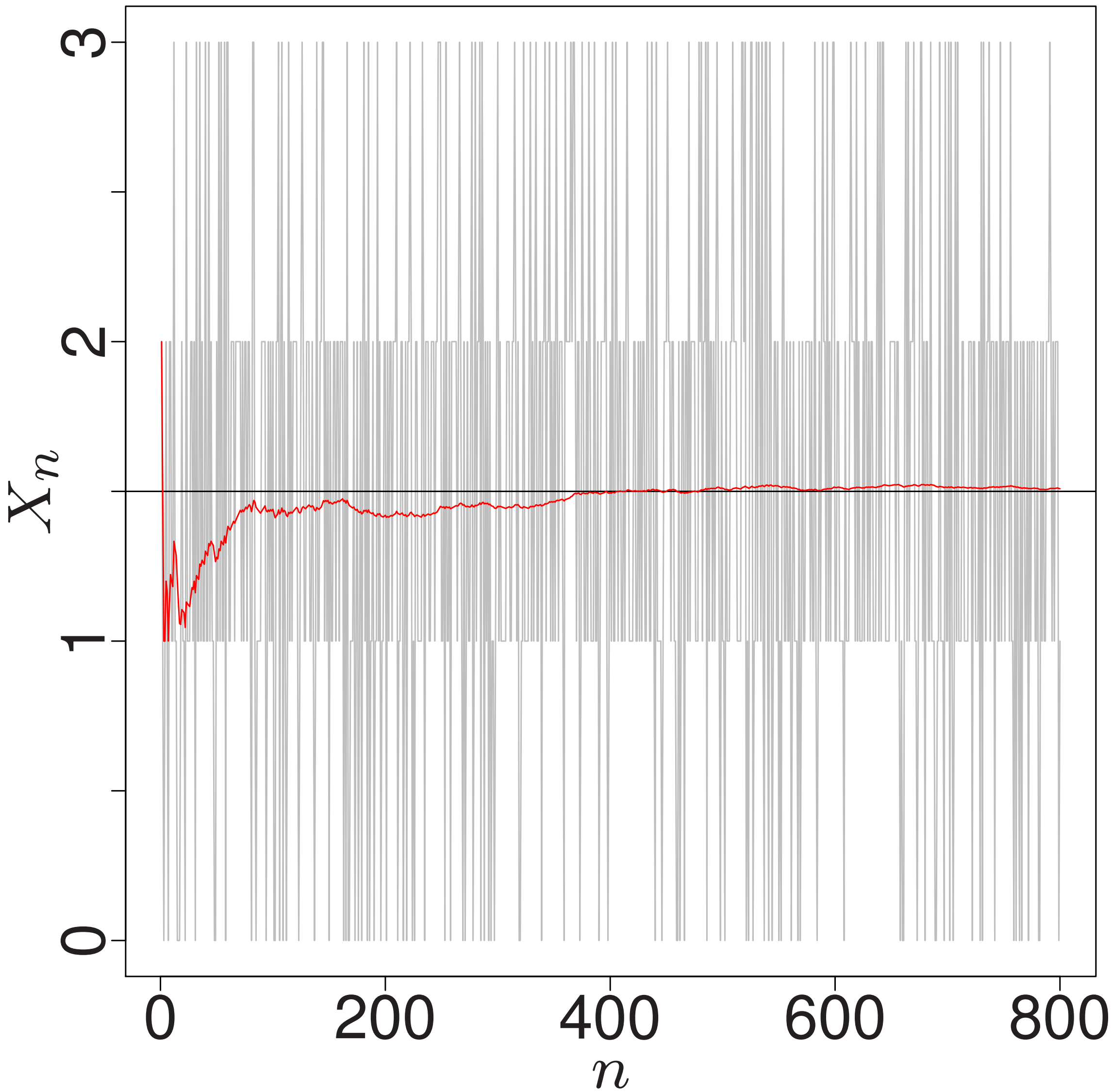
80 Wiederholungen: $X_1, X_2, ..., X_{80}$

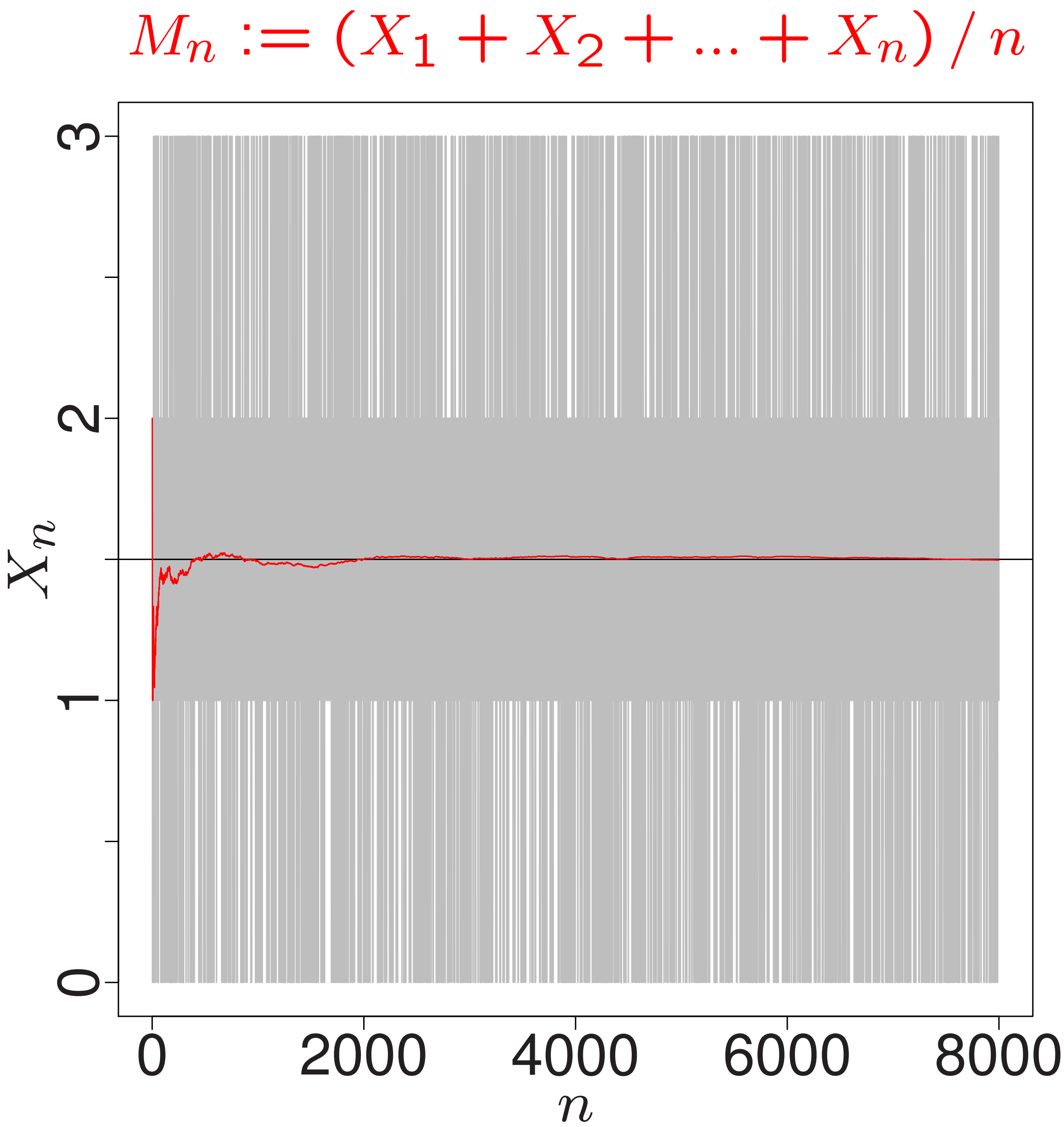


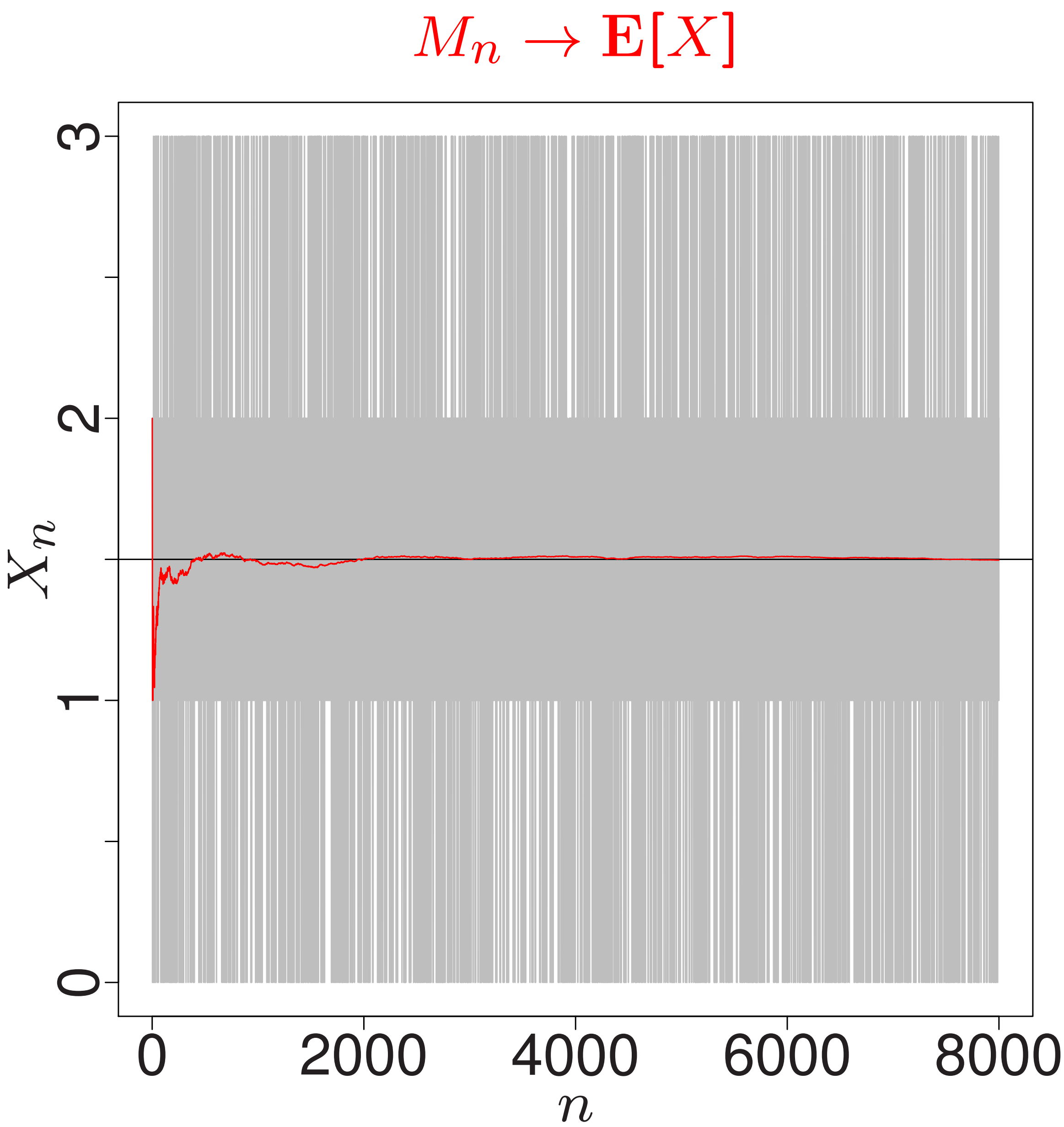
$$M_n := (X_1 + X_2 + \dots + X_n)\,/\,n$$



$$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\,/\,n$$




$M_n := (X_1 + X_2 + ... + X_n)\,/\,n$
3
2
1
0
X_n
0
2000
4000
6000
8000
n


$M_n \to \mathbf{E}[X]$
X_n
0
1
2
3
0
2000
4000
6000
8000
n

Das Schwache Gesetz der Großen Zahlen wurde von Jacob Bernoulli im Münzwurfmodell endeckt.