Vorlesung 5b

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 1 Uniforme Verteilung & Co, Exponentialverteilung

Eine Reprise der ersten Vorlesungsstunde:

Kontinuierlich uniform verteilte Zufallsvariable:

Sei S eine Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ mit endlichem Inhalt $V(S)$.

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich S heißt

uniform verteilt auf S,

wenn für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Inhalt $V(A)$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{V(S)}.$$

(Man beachte die Analogie zu

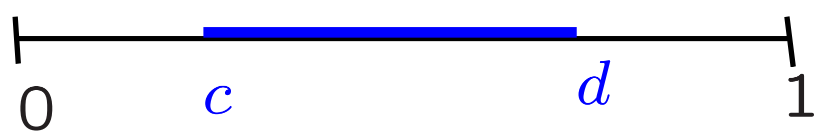
“Anzahl günstige durch Anzahl mögliche Fälle”)

Beispiel 1:

$$S := [0,1] \subset \mathbb{R}^1$$

$$A := [c,d] \quad \text{mit } 0 \leq c \leq d \leq 1$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = d - c.$$

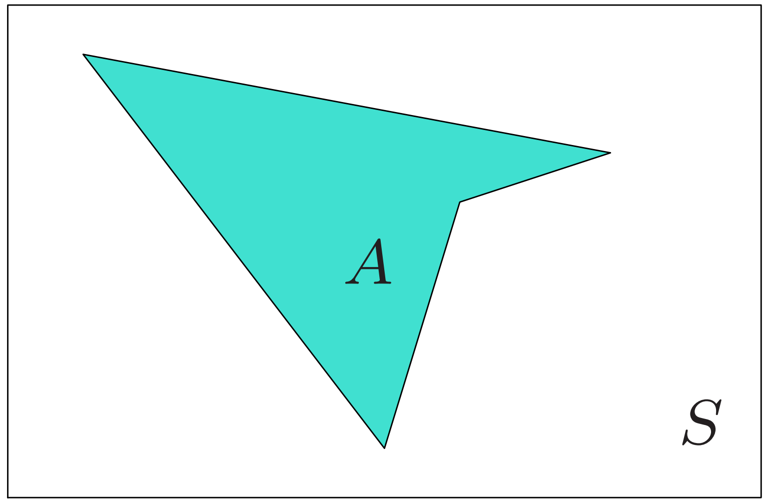


Beispiel 2:

$$S := [0, \ell] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$$

$A \subset S$ mit Flächeninhalt $V(A)$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{\ell \cdot b}.$$


A
S

Für diskret uniform verteilte Zufallsvariable hatten wir

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S}.$$

Das Analogon dazu ist jetzt:

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

Der Ausdruck da taucht hier in zwei Bedeutungen auf:

links als infinitesimales Raumstück

und rechts als dessen infinitesimaler Inhalt.

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

Die Gleichung bekommt ihre exakte Bedeutung

“unter dem Integral”:

$$\int_A \mathbf{P}(X \in da) := P(X \in A) = \frac{V(A)}{V(S)} = \int_A \frac{da}{V(S)}$$

Dichten

Wie im Diskreten begnügen wir uns nicht nur

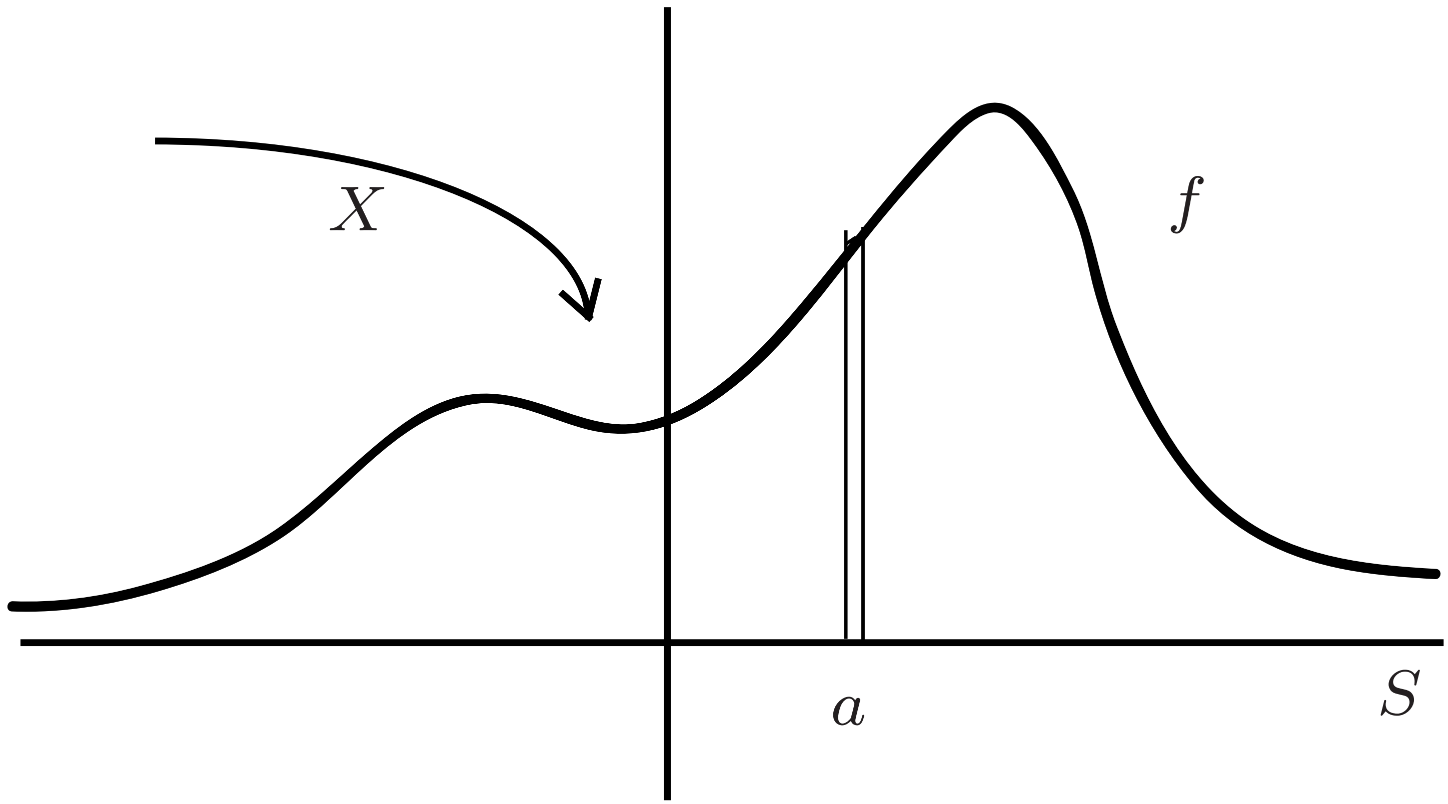
mit rein zufälliger Wahl.

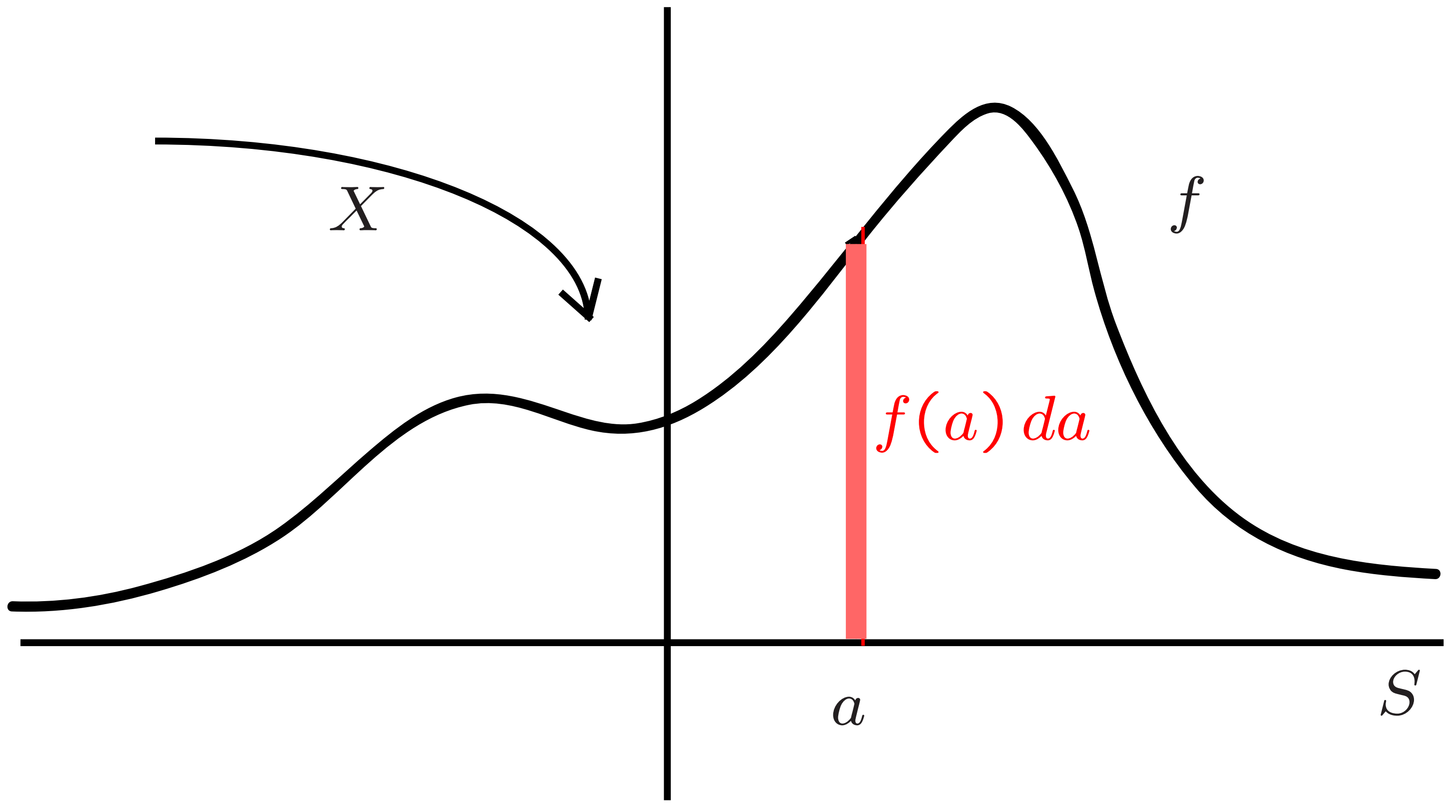
Das Analogon zu den Verteilungsgewichten $\rho(a)$

ist jetzt gegeben durch infinitesimale Gewichte $f(a)\,da$,

wobei $f : S \to \mathbb{R}_+$ eine Funktion ist mit

$$\int_S f(a)\,da = 1.$$


X
f
a
S

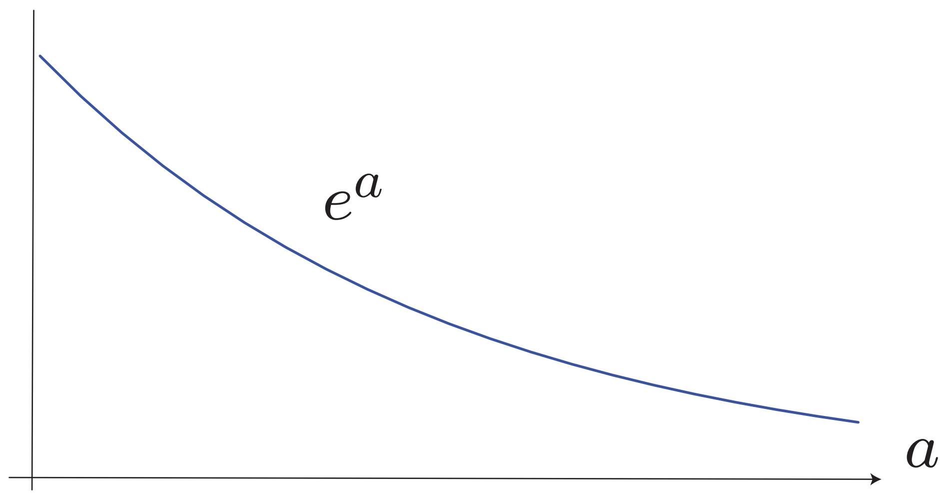

X
f
$f(a)\,da$
a
S

Die Bedingung $\int_S f(a)\,da = 1$ kann auch erfüllt sein,

wenn S unendlichen Inhalt hat.

Man denke an das Beispiel

$$S = [0, \infty); \;\; f(a) = e^{-a}, \quad a \geq 0.$$



Der wichtigste Fall:

$S \subset \mathbb{R}$ Intervall mit Endpunkten $l,\ r$

(dabei ist $l = -\infty$ oder $r = \infty$ erlaubt)

Sei $f\,:\,S \to \mathbb{R}$ nicht-negativ, integrierbar mit

$$\int_l^r f(a)\,da = 1\ .$$

Sei X eine Zufallsvariable mit Zielbereich S.

Gilt für alle Intervalle $[c, d] \subset S$ die Gleichung

$$\mathbf{P}\big(X \in [c, d]\big) = \int_c^d f(a)\, da \ ,$$

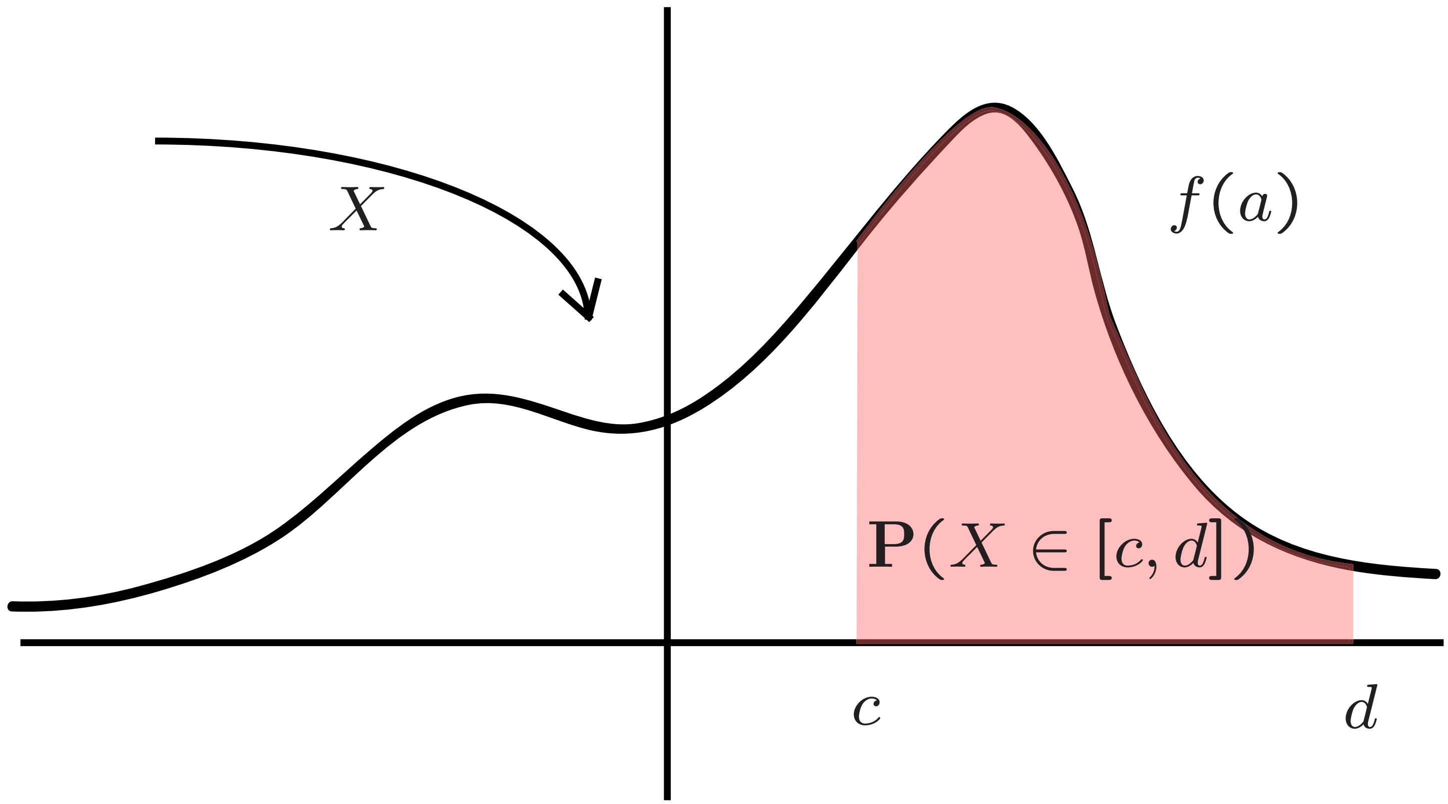
so sagt man, dass

X die *Dichte* $f(a)\, da$ besitzt.

Wir schreiben dann auch kurz

$$\mathbf{P}(X \in da) = f(a)\, da \ , \quad a \in S \ ,$$

und nennen f *Dichtefunktion* (der Verteilung) von X.


X
$f(a)$
$\mathbf{P}(X \in [c, d])$
c
d

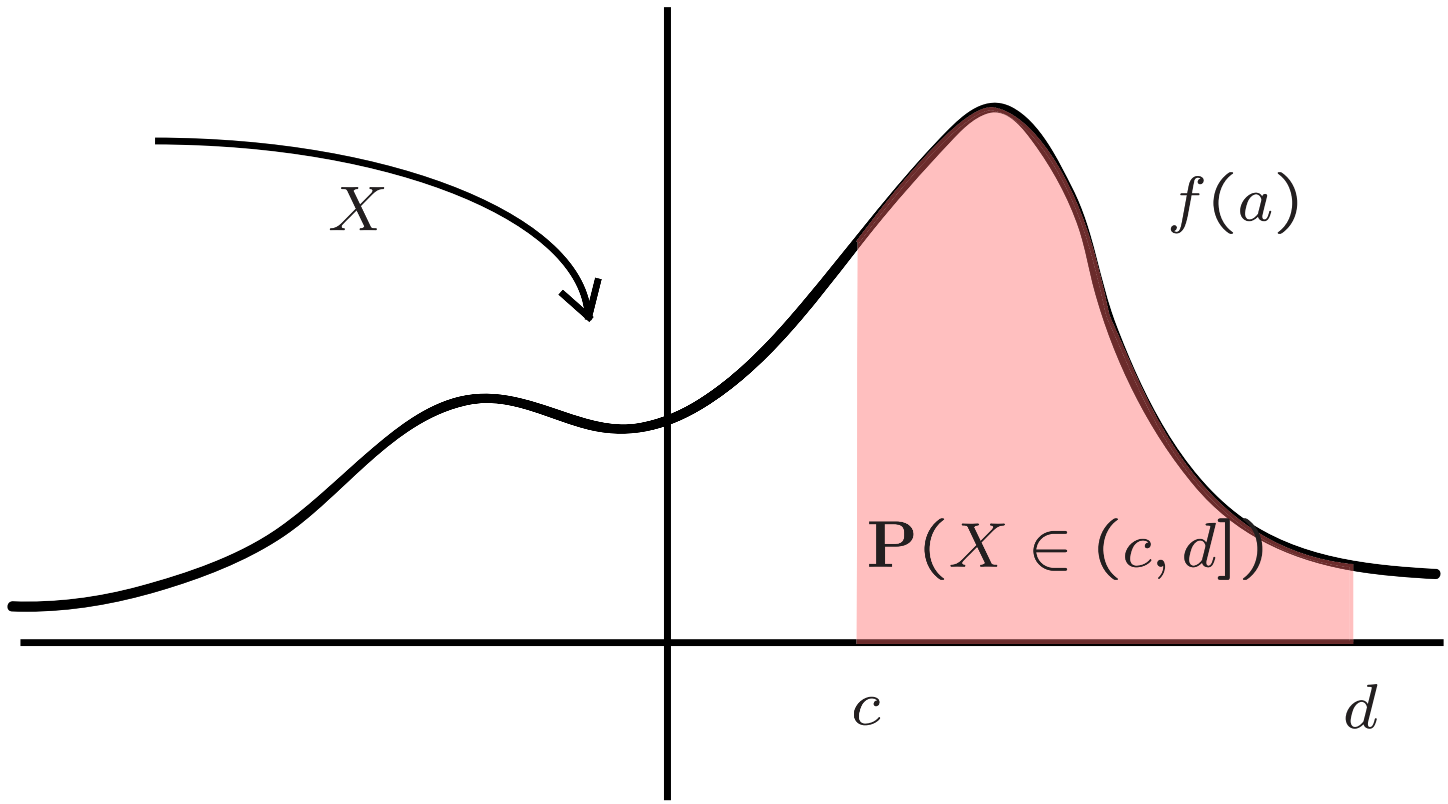
Die Funktion

$$F(x) := \mathbf{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(a)\, da \ , \quad x \in \mathbb{R}$$

(mit $f(a) = 0$ für $a \notin S$)

heißt *Verteilungsfunktion* von X.

Ist f stetig in a, dann ist $f(a) = F'(a)$.



$$\mathbf{P}(X \leq d) - \mathbf{P}(X \leq c) = \mathbf{P}(c < X \leq d)$$

$$F(d) - F(c) = \int_c^d f(a)da$$

Man findet den Hauptsatz der Diff.-und Int.Rechnung wieder!

Nebenbei bemerkt: Für eine Zufallsvariable X mit Dichte $f(a)\,da$ ist

$$\mathbf{P}(X = c) = \int_c^c f(a)\,da = 0.$$

Also gilt (mit naheliegender Schreibweise):

$$\int_{(c,d]} f(a)\,da = \int_{[c,d]} f(a)\,da = \int_c^d f(a)\,da.$$

Toll ist, dass man (z. B. für stückweise stetiges f) das Integral $\int_A f(a)\,da$
nicht nur für Intervalle A, sondern für eine viel größere Klasse
von "messbaren Mengen" zur Verfügung hat,
und dass für derartige paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots$
die "abzählbare Additivität" des Integrals gilt:

$$\int_{\bigcup A_i} f(a) da = \sum_i \int_{A_i} f(a)\,da.$$

Das Stichwort ist das *Lebesgue-Integral*.
Es verallgemeinert den schon aus der Schule bekannten Integralbegriff,
sodass Sie "für die Praxis" nicht umdenken müssen.

Beispiele

1. Eine auf dem Intervall $[0, 2]$ uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte ? da, $\quad 0 \leq a \leq 2$.

Beispiele

1. Eine auf dem Intervall $[0, 2]$ uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $\frac{1}{2}\,da, \;\; 0 \leq a \leq 2$.

Beispiele:

2. Eine in einem endlichen Intervall $S = [l, r]$
uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $f(a)\,da$

mit $f(a) = \quad ? \quad , \quad a \in S$.

Beispiele:

2. Eine in einem endlichen Intervall $S = [l, r]$

uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $f(a)\,da$

mit $f(a) = \dfrac{1}{r-l}, \quad a \in S$.

Beispiele:

3. Sei U uniform verteilt auf $[0,1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(U \le \sqrt{x})$$

$$= \sqrt{x} \overset{!}{=} \int_0^x f(a)\,da, \quad 0 \le x \le 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ ist Dichtefunktion von X.

Beispiele:

4. Sei U uniform verteilt auf $[0,2]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := U^2$.

$$\mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(U \le \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x} \stackrel{!}{=} \int_0^x f(a)\,da, \quad 0 < x \le 4.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ ist Dichtefunktion von X.

Beispiele:

5. Sei U uniform verteilt auf $[0,1]$.

Gefragt ist nach der Dichte von $X := -\ln U$.

$$\mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(-\ln U \le x)$$
$$= \mathbf{P}(U \ge e^{-x}) = 1 - e^{-x} \overset{!}{=} \int_0^x f(a)\,da, \quad x \ge 0.$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ist Dichtefunktion von} X.$$

Erwartungswert und Varianz

einer reellwertigen Zufallsvariable X mit Dichte $f(a)\,da$:

$$\mu = \mathbf{E}[X] := \int_l^r a\, f(a)\, da$$

und

$$\sigma^2 = \mathbf{Var}[X] := \int_l^r (a-\mu)^2 f(a)\, da\ ,$$

vorausgesetzt, die Integrale sind wohldefiniert.

Analog zum Diskreten gilt für $h : S \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{E}[h(X)] = \int_l^r h(a) f(a)\, da$$

vorausgesetzt das Integral existiert.

Definition:

Eine $\mathbb{R}_+$-wertige Zufallsvariable X heißt

standard-exponentialverteilt,

falls

$$\mathbf{P}(X > t) = e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

Y heißt exponentialverteilt mit Parameter λ,

kurz Exp(λ)-verteilt, falls

$$\mathbf{P}(Y > t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Es ergibt sich sofort:

Ist X standard-exponentialverteilt, dann ist $\frac{X}{\lambda}$ Exp(λ)-verteilt.

Ist Y Exp(λ)-verteilt, dann ist λY Exp(1)-verteilt.

Die Verteilungsfunktion von Y ist

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Die Dichte von Y ist

$$f(a) = \lambda e^{\lambda a} \, da, \quad a \geq 0.$$

Erwartungswert und Varianz einer

standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen X:

Mit partieller Integration

$$\int u\, v' = uv - \int u'v$$

ergibt sich

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty x\, e^{-x}\, dx = -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 1 \cdot e^{-x} dx = 1$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2\, e^{-x}\, dx = -x^2 e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2x \cdot e^{-x} dx = 2$$

Also: $\mathbf{E}[X] = 1,\ \mathbf{Var} X = 1.$

Daraus folgt sofort (warum?) :

Ist Y exponentialverteilt zum Parameter $\lambda > 0$, so gilt

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbf{Var}\, Y = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Sei X standard-exponentialverteiltes und $\lambda > 0$.

Dann hat $Y := \frac{1}{\lambda}X$ die Dichte

$$f(y)dy = \lambda e^{-\lambda y}\, dy, \quad y \geq 0$$

(denn Y ist ja Exp(λ)-verteilt)

Allgemeiner gilt:

Lemma:

Die reellwertige ZV X habe Dichte $f(x)\,dx$.

Für $\lambda > 0$ hat dann $Y := \frac{1}{\lambda}X$ die Dichte $f(\lambda y)\,\lambda\,dy$.

Beweis:

$$\mathbf{P}(c \leq Y \leq d) = \mathbf{P}(\lambda c \leq X \leq \lambda d)$$

$$= \int_{\lambda c}^{\lambda d} f(x)\,dx = \int_{c}^{d} f(\lambda y)\,\lambda\,dy$$

(mit der Substitution $x = \lambda y$). $\square$

Lemma:

Die reellwertige ZV X habe Dichte $f(x)\,dx$.

Für $\lambda > 0$ hat dann $Y := \frac{1}{\lambda}X$ die Dichte $f(\lambda y)\,\lambda\,dy$.

Alternativer Beweis:

$$F_Y(d) = \mathbf{P}(Y \le d) = \mathbf{P}(X \le \lambda d) = F_X(\lambda d),$$

also

$$F'_Y(y) = \lambda F'_X(\lambda y). \quad \Box$$

Lemma:

Die reellwertige ZV X habe Dichte $f(x)\,dx$.

Für $\lambda > 0$ hat dann $Y := \frac{1}{\lambda}X$ die Dichte $f(\lambda y)\,\lambda\,dy$.

Heuristisches Argument:

X hat Dichte $f(x)\,dx$. Dann gilt:

$$\mathbf{P}(Y \in dy) = \mathbf{P}(X \in d(\lambda y))$$
$$= f(\lambda y)\,d(\lambda y)$$
$$= f(\lambda y)\,\lambda\,dy.$$

Wir erinnern an die “Exponentialapproximation”:

(Vorlesung 4b und Buch Seite 42):

Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_n geometrisch verteilt mit $\mathbf{E}[X_n] \to \infty$ für $n \to \infty$, dann gilt:

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\Big) \to e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\Big) \to e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Ist X eine standard-exponentialverteilte Zufallsvariable,

dann kann man dies schreiben als

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\Big) \to \mathbf{P}(X \geq t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Man sagt dafür auch:

Die Folge der Zufallsvariablen $X_n/\mathbf{E}[X_n]$

konvergiert in Verteilung

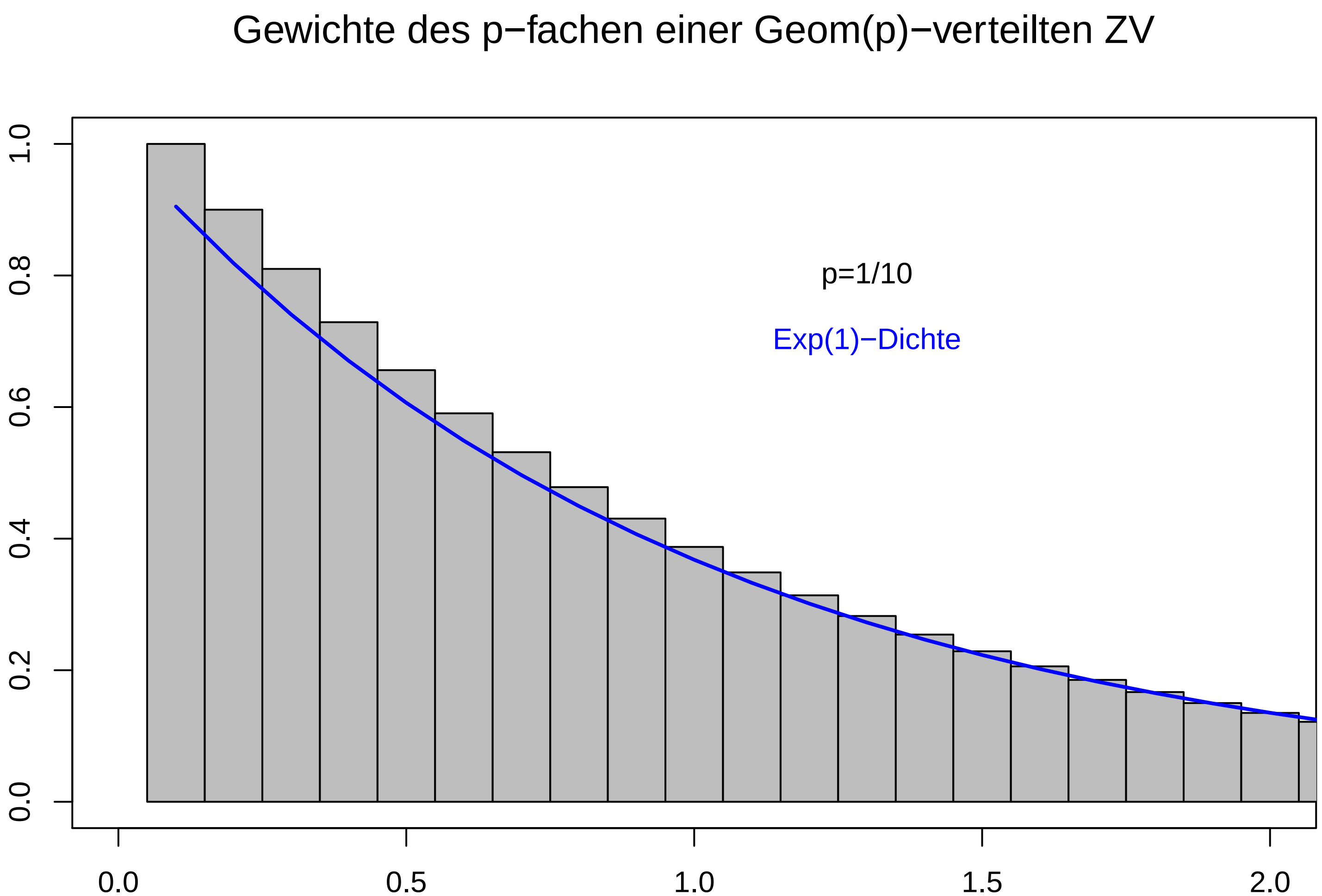
gegen die Zufallsvariable X.

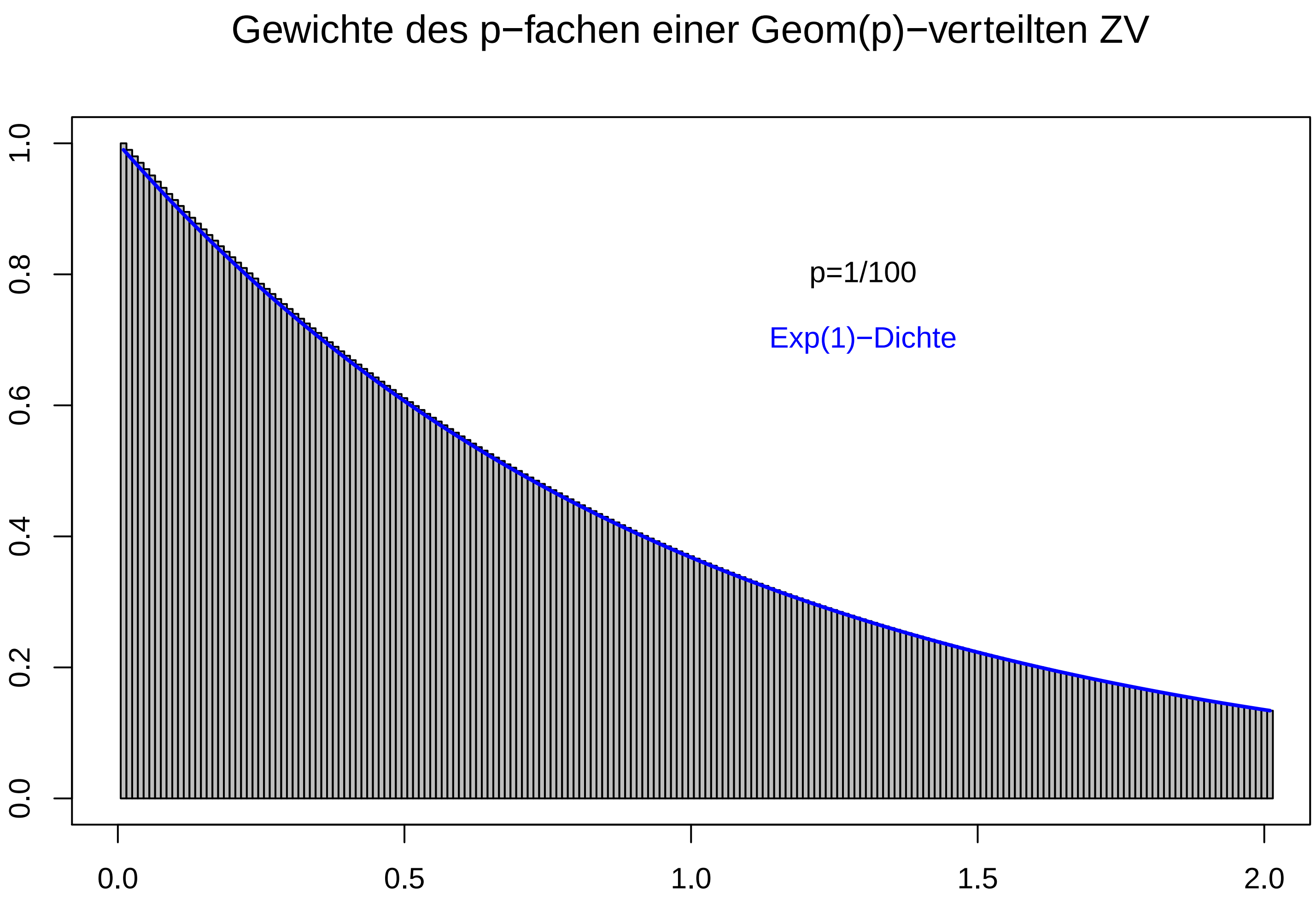
Salopp gesprochen:

Man holt für kleines p

eine Geom(p)-verteilte Zufallsvariable Y zurück ins Bild,

indem man pY betrachtet.


Gewichte des p−fachen einer Geom(p)−verteilten ZV
p=1/10
Exp(1)−Dichte
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0



Gewichte des p−fachen einer Geom(p)−verteilten ZV
p=1/100
Exp(1)−Dichte
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0