Vorlesung 11b

Mehrstufige Zufallsexperimente

und

Markovketten

bisher Zweistufigkeit: von “heute” zu “morgen”

jetzt: von “heute und morgen” zu “übermorgen”, etc.

Für jedes $i = 1, \ldots, n-1$ hat man

Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(a_1 \ldots a_i, a_{i+1}) = \mathbf{P}_{a_1 \ldots a_i}(X_{i+1} = a_{i+1}) \ ,$$

die angeben,

mit welcher Wahrscheinlichkeit in der $(i+1)$-ten Stufe

das Ereignis $\{X_{i+1} = a_{i+1}\}$ eintritt,

gegeben das Eintreten von $\{X_1 = a_1, \ldots, X_i = a_i\}$.

Die gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_n$

ergibt sich rekursiv als

Multiplikationsregel

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n)$$

$$= \mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_{n-1} = a_{n-1}) P(a_1 \ldots a_{n-1}, a_n)$$

$$= \cdots$$

$$= \rho(a_1) P(a_1, a_2) \cdots P(a_1 \ldots a_{n-1}, a_n)\,.$$

Beispiel: Die Pólya-Urne.

In einer Urne befinden sich anfangs
eine weiße und eine blaue Kugel.
In jedem Schritt wird eine Kugel rein zufällig gezogen und gemeinsam mit einer zusätzlichen Kugel derselben Farbe zurückgelegt.
Die Zufallsvariable Z_i mit Werten in $\{0, 1\}$ bezeichne die im i-ten Zug vorgefundene Farbe (0 für blau, 1 für weiß).

$$\mathbf{P}(Z_1 = 0) = \mathbf{P}(Z_1 = 1) = \tfrac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}_0(Z_2 = 0) = \tfrac{2}{3}$$

$$\mathbf{P}_0(Z_2 = 1) = \tfrac{1}{3}$$

$$\mathbf{P}_{00}(Z_3 = 0) = \tfrac{3}{4}$$

$$\mathbf{P}_{01}(Z_3 = 0) = \tfrac{2}{4}$$

u. s. w.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind

$$\mathbf{P}_{a_1 \ldots a_i}(Z_{i+1} = a_{i+1}) = \frac{1+k}{2+i} \tag{1}$$

mit $a_1, \ldots, a_i = 0, 1$,

$$k = k(a_1, \ldots, a_{i+1}) := \#\{j : 1 \leq j \leq i, a_j = a_{i+1}\} \;;$$

$1 + k$ ist also die Zahl der Kugeln in der Urne,

die nach i Zügen die Farbe a_{i+1} haben.

Z. B. ist

$$\mathbf{P}\big((Z_1,\dots,Z_8)=(1,1,0,1,0,0,1,1)\big)=\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{5}\,\frac{2}{6}\,\frac{3}{7}\,\frac{4}{8}\,\frac{5}{9}$$

$$=\frac{5!\,3!}{9!}\,.$$

Für $0 \le k \le n$ hat jede 01-Zugfolge $(a_1,\dots,a_n)$

mit $a_1+\cdots+a_n=k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\mathbf{P}\big((Z_1,\dots,Z_n)=(a_1,\dots,a_n)\big)=\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\binom{n}{k}^{-1}.$$

Für $0 \le k \le n$ hat jede 01-Zugfolge $(a_1, \dots, a_n)$

mit $a_1 + \cdots + a_n = k$ dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\mathbf{P}\big((Z_1, \dots, Z_n) = (a_1, \dots, a_n)\big) = \frac{1}{n+1} \binom{n}{k}^{-1} .$$

Es gibt $\binom{n}{k}$ derartige Zugfolgen. Also ist

$$\mathbf{P}(Z_1 + \cdots + Z_n = k) = \frac{1}{n+1}\,, \quad k = 0, \dots, n\,.$$

Fazit: Die Anzahl der

nach n Zügen hinzugekommenen weißen Kugeln

ist uniform verteilt in $\{0, 1, \dots, n\}$.

Pólya-Urne mit r Farben:

Wieder wird in jedem Zug die gezogene Kugel
zusammen mit einer gleichfarbigen Kugel zurückgelegt.

Die Anfangsbesetzung sei $(1, \ldots, 1)$,
also je eine Kugel von jeder Farbe.

$X_{jn} :=$ # Neuzugänge der Farbe j in n Schritten.

Sei $(k_1, \ldots, k_r) \in S_{n,r}$,

d.h. $k_j \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 + \cdots + k_r = n$.

Man sieht wie im Fall $r = 2$:

Alle möglichen Zugfolgen

von $(1, \ldots, 1)$ nach $(1 + k_1, \ldots, 1 + k_r)$

haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$\frac{k_1! \cdots k_r!}{r \cdot (r+1) \cdots (n+r-1)} = \frac{k_1! \cdots k_r!}{(n+r-1)!}(r-1)!\ .$$

Alle möglichen Zugfolgen

von $(1, \ldots, 1)$ nach $(1 + k_1, \ldots, 1 + k_r)$

haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich

$$k_1! \cdots k_r! \frac{(r-1)!}{(n+r-1)!} \,.$$

Es gibt $\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}$ solche Zugfolgen. Also ist

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{1n} = k_1, \ldots, X_{rn} = k_r) &= n! \frac{(r-1)!}{(n+r-1)!} \\ &= \frac{1}{\binom{n+r-1}{n}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(X_{1n} = k_1, \ldots, X_{rn} = k_r) = \frac{1}{\binom{n+r-1}{n}},$$

d.h. $(X_{1n}, \ldots, X_{rn})$ ist uniform verteilt auf $S_{n,r}$.

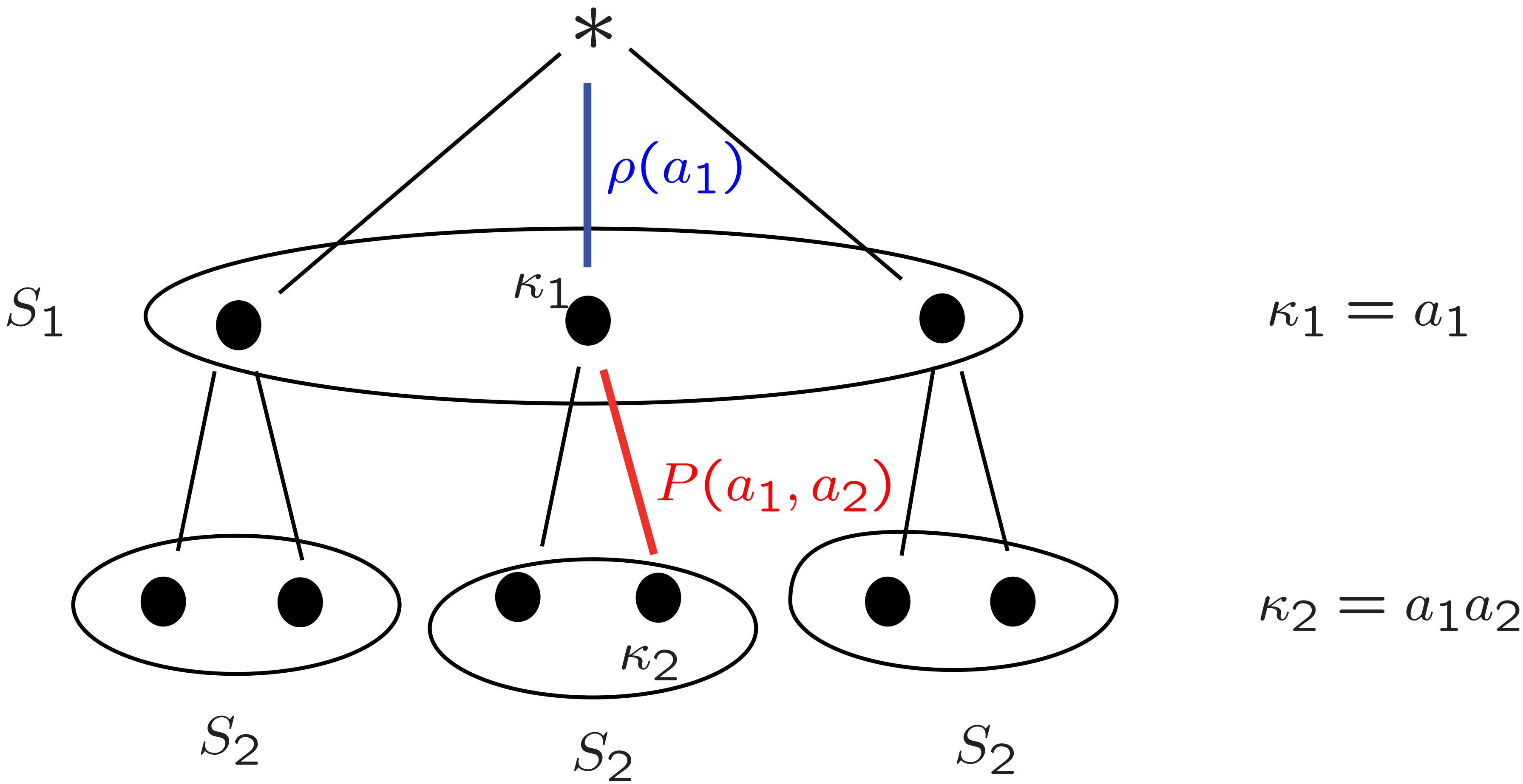
Fazit:

Die Pólya-Urne mit Anfangsbesetzung $(1, \ldots, 1)$

liefert

uniform verteilte Besetzungen!

Veranschaulichung von zweistufigen Experimenten durch *Bäume*:



$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1) P(a_1, a_2)\,.$$

(Produkt der Kantengewichte von $*$ zum Knoten κ_2)

Veranschaulichung von mehrstufigen Experimenten durch *Bäume*:

$\kappa_i = a_1 \ldots a_i$ ist ein *Knoten der Tiefe* i

Die *Nachfolger* von κ_i sind von der Form $\kappa_i \, a_{i+1}$

Die *Kanten* des Baums erhalten die Gewichte

$$g(*, \kappa_1) := \rho(a_1) \ , \quad g(\kappa_i, \kappa_{i+1}) := P(a_1 \ldots a_i, a_{i+1})$$

mit $\kappa_1 = a_1, \ \ \kappa_i = a_1 \ldots a_i, \ \ \kappa_{i+1} = a_1 \ldots a_{i+1}$.

Die Wahrscheinlichkeit, in einem bestimmten Blatt zu enden, ergibt sich als Produkt der Kantengewichte entlang des Weges von der Wurzel zum Blatt.

Eine wichtige Beispielklasse mehrstufiger Zufallsexperimente:

alle X_i haben ein-und denselben Wertebereich S

und die Übergangswahrscheinlichkeiten der nächsten Stufe

hängen nur von der aktuellen Stufe ab

(und nicht von den vorhergehenden):

$$P(\ldots a_{i-2}\, a_{i-1}, a_i) = P(a_{i-1}, a_i)$$

In dem Fall spricht man von einer **Markovkette**

auf dem Zustandsraum S mit Übergangsmatrix P.

Die Stufen sind jetzt mit $i = 0, 1, 2, \ldots$ indiziert.

Man denkt sich die Übergangsmatrix P als fest

und notiert die Verteilung ρ von X_0 (die "Startverteilung")

als Subskript bei der Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}$.

Die Multiplikationsregel ergibt:

$$\mathbf{P}_\rho(X_0 = a_0, \ldots, X_n = a_n)$$
$$= \rho(a_0) P(a_0, a_1) \cdots P(a_{n-1}, a_n)$$

Startet die Kette in $a \in S$,

dann ist ρ die auf a konzentrierte Verteilung

(notiert als $\rho = \delta_a$).

Statt $\mathbf{P}_{\delta_a}$ schreibt man auch $\mathbf{P}_a$

und erhält

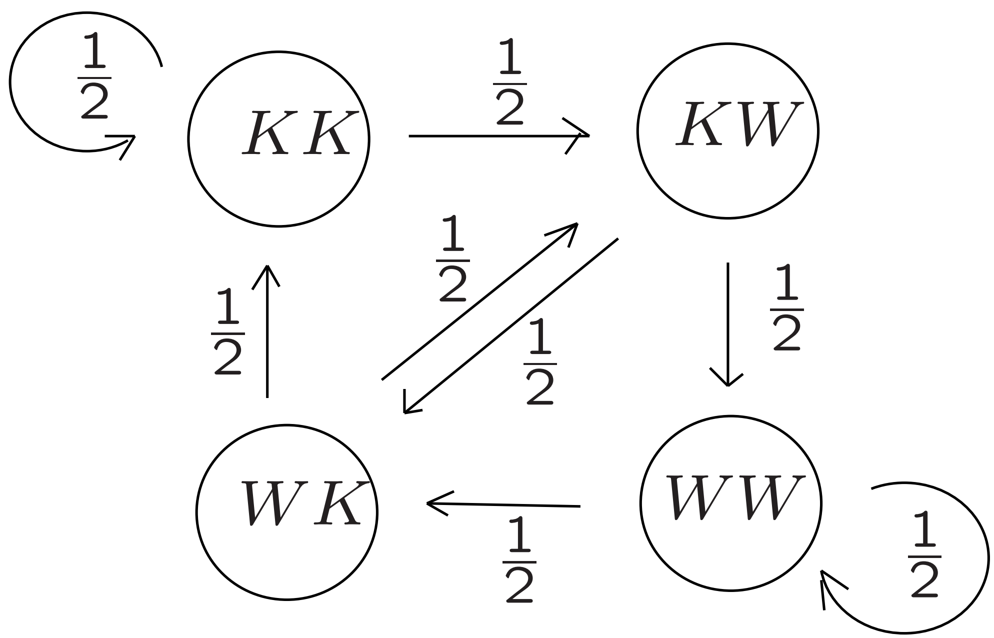
$$\mathbf{P}_a(X_0 = a) = 1,$$

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n) = P(a, a_1) \cdots P(a_{n-1}, a_n) \ .$$

Beispiel 1:

Muster der Länge 2 beim fairen Münzwurf

Graph der Übergangswahrscheinlichkeiten:



Beispiel 2:

(p, q)-Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$:

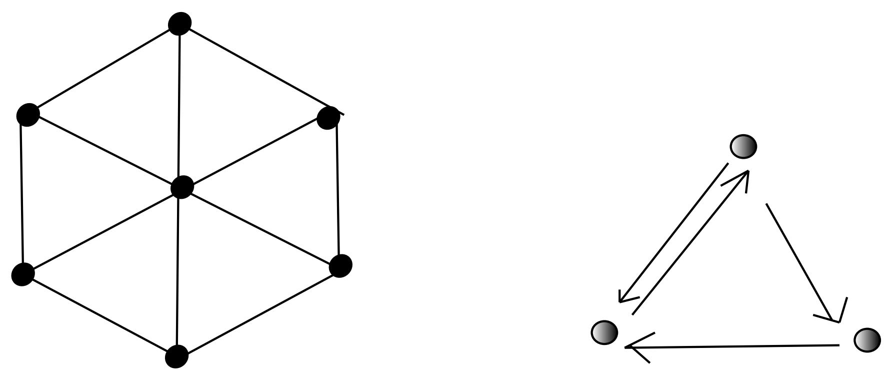
$$S = \mathbb{Z}$$

$$P(k, k+1) = p, \quad P(k, k-1) = 1 - p =: q$$

Beispiel 3:

Einfache Irrfahrt

auf einem (ungerichteten oder gerichteten) Graphen



$S :=$ die Menge der Knoten.

Der nächste Schritt erfolgt jeweils

zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarn.

Beispiel 4:

Pólya-Urne

$$S = \{(w,b) : w,b \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$$

$$P((w,b),(w+1,b)) = \frac{w}{w+b}\,,$$

$$P((w,b),(w,b+1)) = \frac{b}{w+b}\,.$$