Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik"

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 18. Januar 2013

33. S X sei Poisson(α)-verteilt, Y sei Poisson(β)-verteilt, X und Y seien unabhängig.

a) Zeigen Sie: Auch $X+Y$ ist poissonverteilt.

b) Berechnen Sie die Gewichte der bedingten Verteilung von X gegeben $X+Y=n$, $n \in \mathbb{N}$.

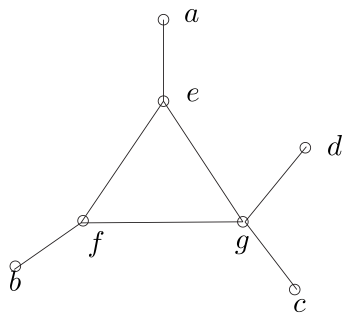
c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $Z = \sum_{i=1}^{Y} X_i$. Dabei sind $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Kopien von X, die auch von Y unabhängig sind.

34. S Wir betrachten eine gewöhnliche Irrfahrt auf dem skizzierten Graphen mit Knotenmenge $S = \{a,b,c,d,e,f,g\}$: von jedem Punkt wird der nächste Schritt zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarpunkt gemacht.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei Start in e die Menge $\{b\}$ getroffen, bevor die Menge $\{c,d\}$ getroffen wird?

b) Was ist die erwartete Anzahl von Schritten, die man bei Start in e benötigt, um die Menge $\{b,c,d\}$ zu treffen?

c) Es sei X_0 der zufällige Zustand beim Start und X_1 der Zustand nach einem Schritt. Finden Sie eine Verteilung π auf S mit der Eigenschaft: Hat X_0 die Verteilung π, dann auch X_1.



35. Wir betrachten eine Folge $(X_i)_{i\geq 1}$ von zufälligen Buchstaben. Die X_i seien unabhängig und jeweils gleich A, B oder C mit Wahrscheinlichkeit 1/3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wartet man auf das Muster ABC länger als auf das Muster BB?

36. Z_1, Z_2, Z_3 seien unabhängig und standard-normalverteilt, $\vec{Z}$ sei der zufällige Vektor in $\mathbb{R}^3$ mit Standardkoordinaten Z_1, Z_2, Z_3. Es sei $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ eine Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^3$.

a) Warum sind die $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$-Koordinaten von $\vec{Z}$ unabhängig und standard-normalverteilt? (Hier reicht eine anschauliche Begründung (ohne formalen Beweis) aus.)

b) Warum sind $\bar{Z} := \frac{1}{3}(Z_1 + Z_2 + Z_3)$ und $Y := (Z_1 - \bar{Z})^2 + (Z_2 - \bar{Z})^2 + (Z_3 - \bar{Z})^2$ unabhängig? Warum ist Y so verteilt wie die Summe der Quadrate von zwei unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallsvariablen?