

Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 21. Dezember 2012

29. a) Was ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Objekten ein Tripel (d.h. 3 verschiedene Objekte mit Reihung) auszuwählen?

b) Angenommen, von den n Objekten ist jedes - unabhängig von den übrigen - mit Wahrscheinlichkeit p intakt. Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Möglichkeiten, ein Tripel bestehend aus 3 intakten Objekten auszuwählen? (Hinweis: Die Linearität des Erwartungswertes ist hilfreich.)

c) Berechnen Sie $\mathbf{E}[X(X-1)(X-2)]$ für eine $\text{Bin}(n, p)$ -verteilte Zufallsvariable X .

30. a) Es sei n eine natürliche Zahl. Wir betrachten das folgende zweistufige Experiment: In Stufe 1 präparieren wir eine rein zufällige Permutation Π_n von $1, \dots, n$. Gegeben $\Pi_n = \pi$, konstruieren wir in der zweiten Stufe aus der Zykeldarstellung von π eine zufällige Permutation von $1, \dots, n+1$ wie folgt. Wir wählen J rein zufällig aus $\{1, \dots, n+1\}$. Fällt J auf $n+1$, dann nehmen wir den Zykel $(n+1)$ (d.h. den nur aus dem Element $n+1$ bestehenden Zykel) zu den Zykeln von π dazu. Fällt J auf k , dann vergrößern wir den Zykel von π , der k enthält, indem wir das Element $n+1$ rechts neben dem Element k einfügen. Zeigen Sie: Das sich so (mit rein zufälligem Π_n) ergebende Π_{n+1} ist eine rein zufällige Permutation von $1, \dots, n+1$.

b) (Ein zufälliger rekursiver Baum). T_0 bestehe aus nur einem Knoten (der Wurzel), T_{n+1} entstehe aus T_n dadurch, dass man einen neuen Knoten mit Wahrscheinlichkeit $1/(n+1)$ mit einem rein zufällig gewählten Knoten von T_n verbindet. Beschreiben Sie, wie man so auf rekursive Weise die Zykeldarstellung einer rein zufälligen Permutation von $1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$, erzeugen kann.

31. S Das zufällige Paar (X_1, X_2) entstehe durch ein zweistufiges Zufallsexperiment wie folgt: In Stufe 1 wählen wir eine auf $\{1, 2, 3\}$ uniform verteilte Zahl. In Stufe 2 verschieben wir das Ergebnis aus Stufe 1 mit W'keit $1/3$ um eins nach rechts und mit W'kt $2/3$ um eins nach links.

a) Geben Sie (i) die Matrix der Gewichte der Übergangswahrscheinlichkeiten, (ii) die Matrix der gemeinsamen Verteilungsgewichte von X_1 und X_2 , (iii) die Verteilungsgewichte von X_2 an.

b) Finden Sie den bedingten Erwartungswert und die bedingte Varianz von X_2 gegeben $\{X_1 = 3\}$.

c) Finden Sie Übergangsverteilungen $Q(b, \cdot)$, sodass (X_2, X_1) auf zweistufige Weise, mit X_2 als erster Stufe, entsteht.

32. S In zwei Teilpopulationen des Landes Oz sind die Mittelwerte des individuellen Einkommens 1000 bzw. 10000 Taler, und die Standardabweichungen des individuellen Einkommens 100 bzw. 200 Taler. Das mittlere Einkommen in der gesamten (aus den beiden Teilpopulationen bestehenden) Population beträgt 1900 Taler. Finden Sie

(i) die Anteile der beiden Populationen,

(ii) die Standardabweichung des Einkommens in der Gesamtpopulation (oder anders gesagt: des Einkommens eines aus der Gesamtpopulation rein zufällig herausgegriffenen Individuums).