Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 7. Dezember 2012

21. S. Ein bestimmter Flugzeugtyp hat 500 Sitzplätze. Wieviele Platzbuchungen darf die Fluggesellschaft annehmen, wenn erfahrungsgemäß eine Buchung mit Wahrscheinlichkeit 0.1 storniert wird und die Fluggesellschaft eine Wahrscheinlichkeit von 2.5% für eine Überbuchung in Kauf nimmt? (Die angegebenen Zahlen sind frei erfunden.)
Hinweise: i) Es gilt bekanntermaßen: $\mathbf{P}(|Z| > 1.96) = 0.05$ *für N(0,1)-verteiltes* Z.

(ii) Für Bin(n, p)-verteiltes X *mit nicht zu kleinem* npq *empfiehlt sich für ganzzahliges* k *die Normalapproximation* $\mathbf{P}(X \geq k) \approx \mathbf{P}\left(Z > (k - \frac{1}{2} - np)/\sqrt{npq}\right)$, *vgl. Buch S. 44.*

22. S. Z_1, Z_2 seien unabhängig und $\mathrm{N}(0,1)$-verteilt. X_1 und X_2 seien Linearkombinationen von Z_1 und Z_2 mit folgenden Eigenschaften: X_1 ist $\mathrm{N}(3,2)$-verteilt, X_2 ist $\mathrm{N}(-1,3)$-verteilt, und die Kovarianz von X_1 und X_2 ist -2.
(i) Wie ist $X_1 + X_2$ verteilt?
(ii) Wo sind die Dichten von X_1, X_2 und $X_1 + X_2$ maximal, und wie ist jeweils die Höhe der Dichte (alias der Wert der Dichtefunktion) im Maximum?
(iii) Geben Sie ein Intervall an, das symmetrisch um den Erwartungswert von $X_1 + X_2$ liegt und in das die Zufallsvariable $X_1 + X_2$ mit Wahrscheinlichkeit ~ 0.95 fällt.

23. X sei standard-exponentialverteilt. Berechnen Sie den Erwartungswert von $\sqrt{X}$.

24. Z_1 und Z_2 seien unabhängig und $\mathrm{N}(0,1)$-verteilt.

(i) Berechnen Sie $\mathbf{P}(Z_1^2 + Z_2^2 \geq a)$.

Sie dürfen dabei die folgende, aus dem Übergang zu Polarkoordinaten resultierende Identität verwenden:

$$\iint\limits_{\{(x,y):\sqrt{x^2+y^2}\geq c\}} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy = 2\pi \int_c^\infty e^{-r^2/2} r\,dr, \qquad c \geq 0.$$

(ii) Welche (Ihnen bereits aus der Vorlesung bekannte) Verteilung hat $Z_1^2 + Z_2^2$?