

**Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“**

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 30. November 2012

**17. Wie weit vom Ursprung?**  $X$  sei ein aus einer (dreidimensionalen) Kugel mit Radius 1 uniform gewählter Punkt, und  $R$  sei sein Abstand vom Kugelmittelpunkt. Berechnen Sie

- (i) die Verteilungsfunktion      (ii) die Dichte  
(iii) den Erwartungswert      (iv) die Standardabweichung  
von  $R$ .

**18. Momente der Exponentialverteilung** a)  $X$  sei standard-exponentialverteilt. Zeigen Sie: Für jedes  $n \geq 1$  ist  $\mathbf{E}[X^n] = n\mathbf{E}[X^{n-1}]$ .

b) Berechnen Sie  $\mathbf{E}[Y^n]$  für ein  $\text{Exp}(\lambda)$ -verteiltes  $Y$ ,  $\lambda > 0$ .

**19. S Einfache Transformationen.** a)  $U$  sei uniform verteilt auf dem Intervall  $[1, 10^9]$ . Wir betrachten die Zufallsvariable  $Y := \log_{10} U$ . Berechnen Sie deren

- (i) Verteilungsfunktion  $G : y \mapsto \mathbf{P}(Y \leq y)$ ,  
(ii) Dichte  $g(y)dy$ ,  $0 \leq y \leq 9$ .

Welchen Wert haben die Funktionen  $G$  und  $g$  an der Stelle  $y = 9$ ?

b)  $X$  sei standard-exponentialverteilt,  $Y := \sqrt{X}$ . Berechnen Sie

- (i) die Verteilungsfunktion      (ii) die Dichte  
von  $Y$ .

**20. S Ein zufälliges Paar und dessen Summe.**  $(X_1, X_2)$  seien die Koordinaten eines auf dem Einheitsquadrat  $[0, 1]^2$  uniform verteilten Punktes.

a) Berechnen Sie

- (i) die Verteilungsfunktion      (ii) die Dichte      (iii) den Erwartungswert  
der Zufallsvariablen  $Y := X_1 + X_2$ .

*Hinweis: Skizzieren Sie für  $0 \leq b \leq 2$  die Menge  $\{(a_1, a_2) : 0 \leq a_1, a_2 \leq 1, a_1 + a_2 \leq b\}$ . Was hat deren Fläche  $F(b)$  mit der Verteilungsfunktion von  $X_1 + X_2$  zu tun? Was ist der Wert von  $F$  bei  $b = 1$ , und die Steigung von  $b \mapsto F$  auf  $[0, 1)$  bzw auf  $(1, 2]$ ?*

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $\{|X_1 - X_2| > \frac{1}{2}\}$ .