Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 23. November 2012

13. ***Die Standardabweichung der zufälligen Trefferquote.*** In der Stunde Eins haben wir den Anteil p einer Teilfläche F an einer Gesamtfläche G dadurchch geschätzt, dass wir n Punkte rein zufällig in G geworfen und als Schätzer $\hat{p}$ die relative Treffzahl von F genommen haben. Berechnen Sie die Standardabweichung von $\hat{p}$, wenn der tatsächliche Wert von p gleich 1/5 ist. Was ergibt sich für (i) $n = 100$, (ii) $n = 400$, (iii) $n = 1600$?

14 S ***Die Standardabweichung des Stichprobenmittels.*** In einer Herde von 40 Schafen betragen der Erwartungswert und die Standardabweichung des Gewichtes eines zufällig herausgegriffenen Schafes (man spricht auch von *Mittelwert und Standardabweichung in der Population*) 50 kg und 5,6 kg.
(i) Es wird rein zufällig ein Paar von Schafen gezogen. Berechnen Sie die Kovarianz der beiden Gewichte, indem Sie in Gedanken alle 40 Schafe in rein zufälliger Reihenfolge ziehen und die Varianz der Summe als Summe von Varianzen und Kovarianzen schreiben. (Achtung: Die Gesamtsumme der 40 Gewichte ist nicht zufällig!)
(ii) Geben Sie eine intuitive Begründung des Vorzeichens im Ergebnis aus (i).
(iii) Es werden rein zufällig 10 aus den 40 herausgegriffen; das arithmetische Mittel der 10 beobachteten Gewichte (das *Stichprobenmittel*) sei $\bar{X}$. Wie groß sind Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung der Zufallsvariablen $\bar{X}$?

15 ***Positiv oder negativ korreliert?*** a) E_1 und E_2 seien zwei Ereignisse. Zeigen Sie: Die Indikatorvariablen I_{E_1} und I_{E_2} sind positiv korreliert genau dann, wenn $\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) > \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)$ gilt.
b) X sei uniform verteilt auf $\{-1, -\frac{9}{10}, -\frac{8}{10}, \dots, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}, 1\}$. Skizzieren Sie die Menge der möglichen Ausgänge des zufälligen Paares (X, X^2) (die in unserem Beispiel ja alle gleich wahrscheinlich sind). Berechnen Sie die Kovarianz der beiden Zufallsvariablen X und X^2.
c) Das zufällige Paar (X, Y) sei uniform verteilt auf $S := \{(a_1, b_1), \dots, (a_{10}, b_{10}\}$, mit $(a_i) = (25, 36, 2, 85, 42, 65, 76, 82, 22, 55)$, $(b_i) = (92, 45, 76, 5, 34, 68, 59, 70, 89, 2)$. Zeichnen Sie die 10 Punkte in die Ebene. Was schätzen Sie: Ist die Kovarianz von X und Y positiv oder negativ? (Das Programm R nimmt Ihnen die Arbeit ab, wenn Sie eingeben: a $\to c(25, 36, \dots)$, b $\to c(92, 45, \dots)$ und dann den Befehl plot(a,b) verwenden. Ihre Vermutung über das Vorzeichen der Kovarianz können Sie mit cov(a,b) überprüfen.)

16. S ***Warten auf den ersten Erfolg - einmal anders.*** Eine Urne enthält anfangs eine weiße und eine blaue Kugel. Wir ziehen Kugeln nach folgendem Muster: Jede gezogene Kugel wird zurückgelegt, zusammen mit einer weiteren Kugel derselben Farbe. Sei X die Nummer des Zuges, bei dem erstmals eine blaue Kugel gezogen wird. Begründen Sie: $\mathbf{P}(X > i) = \frac{1}{1+i}$. Wie groß ist der Erwartungswert von X?