Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 16. November 2012

9. S ***Kann das Zufall sein?*** Aus 60 Mitgliedern des Instituts A und 40 des Instituts B wurde ein 5-köpfiges Komitee gebildet, mit einem Vertreter aus A und 4 aus B. Jemand stellt die Frage, ob eine so unverhältnismäßige Aufteilung auch “mit einiger Wahrscheinlichkeit” zufällig auftreten könnte.
a) Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Vertreter aus A, wenn aus den 100 Leuten ein 5-köpfiges Komitee rein zufällig ausgewählt wird?
b) Wie wahrscheinlich ist es, dass bei einer rein zufälligen Auswahl eines 5-köpfigen Komitees die Aufteilung so exotisch ausfällt wie eingangs beschrieben, sprich, dass die Anzahl der Vertreter aus A mindestes so weit von ihrem Erwartungswert entfernt liegt wie bei der beobachteten Aufteilung 1:4?

10. S ***The blessings of exchangeability.*** 10 Städte, von denen 2 im Land A, 3 im Land B und 5 im Land C liegen, werden in rein zufälliger Reihenfolge besucht (jede Stadt genau einmal).

a) Wie wahrscheinlich ist es, dass der Besuch Nr. 7 in eine Stadt aus A und der Besuch Nr. 8 in eine Stadt aus B führt?
b) Ein Grenzübertritt von A nach B kostet 50 Euro, einer von C nach B kostet 150 Euro. Alle anderen Grenzübertritte (auch der von B nach A und der von B nach C) kosten nichts. Was sind die erwarteten Kosten der Reise?

11. ***Was hätten Sie geschätzt?*** 1000 Punkte werden rein zufällig ins Innere der Kugel (im $\mathbb{R}^3$) mit Radius 10 um den Ursprung geworfen. Wie wahrscheinlich ist es, dass
a) keiner davon
b) nicht mehr als 3
im Inneren der Kugel mit Radius 1 um den Ursprung landen? Verwenden Sie die Poissonapproximation.

12. ***Couponsammeln.*** a) Was ist beim gewöhnlichen Würfeln die erwartete Anzahl der Würfe (einschließlich des “letztnotwendigen”), bis erstmals
(i) eine Augenzahl geworfen wird, die von der als erste geworfenen Augenzahl verschieden ist
(ii) alle 6 Augenzahlen geworfen wurden?

b) Wie in der ersten Stunde werfen wir (sukzessive) rein zufällig Punkte ins Einheitsquadrat. Dieses sei unterteilt in r^2 Quadrate des Flächeninhaltes r^{-2}, wobei r eine feste natürliche Zahl ist.
Was ist die erwartete Anzahl der Punkte, die es braucht, bis jedes der r^2 Teilquadrate einen Punkt abbekommt? Finden Sie dafür eine Näherung, ausgedrückt durch eine (z. B. aus der AnaLinA) bekannte Funktion.