

Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Freitag, 2. November 2012, zu Beginn der Vorlesung

1. S Wir betrachten das in der ersten Vorlesungsstunde diskutierte Beispiel der “zufälligen Treffer”, jetzt mit einem Anteil der blauen Fläche von $p = 0.4$, und $n = 3$ rein zufällig (einer nach dem anderen) gewählten Punkten.

(i) Wie wahrscheinlich ist es, dass der erste und der dritte Punkt in die blaue Fläche trifft, der zweite aber nicht?

(ii) Wie wahrscheinlich ist es, dass genau zwei der drei Punkte in die blaue Fläche treffen?

(iii) Es sei Z_i , $i = 1, 2, 3$, der $\{0, 1\}$ -wertige Zähler für das Ereignis “der i -te Punkt trifft in die blaue Fläche”. Finden Sie den Wertebereich und die Verteilungsgewichte der Zufallsvariablen $M = \frac{1}{3}(Z_1 + Z_2 + Z_3)$.

2. Aus der Schule und aus der AnaLinA ist die folgende Grenzwertaussage bekannt:

$$(*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Stellen wir uns vor, dass 300 Punkte rein zufällig in die Kreisscheibe mit Radius 1 um den Ursprung gesetzt werden. Wie wahrscheinlich ist es, dass keiner davon einen Abstand von weniger als $1/10$ vom Ursprung hat? Verwenden Sie die Näherung (*).

3. In der Vorlesung haben wir den Anteil einer Teilfläche F an einer Gesamtfläche G mit einem einfachen Monte Carlo-Verfahren ermittelt: $n = 100$ Punkte wurden rein zufällig in G geworfen und der Anteil der Treffer von F ermittelt. Die Genauigkeit der Schätzung haben wir durch k -maliges Wiederholen untersucht; k war 3000.

Erkunden Sie mittels des auf der Homepage von Frau Franziska Wandtner (siehe Link auf der Stoff-Web-Seite) verfügbaren R-Programms “Monte Carlo Simulation”, wie sich die Genauigkeit der Schätzung verändert, wenn statt $n = 100$

(i) $n = 400$ (ii) $n = 1600$ Punkte in die Menge G geworfen werden: Um welchen Faktor (circa) wird jeweils das Histogramm der Schätzwerte schmaler? Und was passiert, wenn Sie mit $k = 1000$ anstatt mit $k = 3000$ Wiederholungen arbeiten? (Das frei verfügbare statistische Programmpaket R bekommen Sie über www.r-project.org, zu finden auch über google \rightarrow R, auf Ihren Rechner.)

4 S. Aus einem Alphabet mit 10 Buchstaben werden Wörter der Länge $n = 4$ (mit rein zufälliger Wahl der Buchstaben) gebildet. Wie wahrscheinlich ist es, dabei ein Wort zu bekommen, in dem kein Buchstabe mehr als einmal vorkommt? Was liefert

(i) die exakte Berechnung

(ii) die Näherung $(1 - \frac{i}{r}) \approx e^{-i/r}$ (eingesetzt für die einzelnen Faktoren und ins Produkt genommen)

(iii) die Stirling-Approximation?