Vorlesung 9b

Markovketten

Teil 2

Zur Erinnerung:

Für eine Markovkette mit Übergangsmatrix P

und Startverteilung ρ gilt

$$\mathbf{P}_\rho(X_0 = a_0, \ldots, X_n = a_n)$$
$$= \rho(a_0) P(a_0, a_1) \cdots P(a_{n-1}, a_n)$$

Transport von Verteilungen

$\mathbf{P}_\rho(X_n = c)$ zerlegt nach X_{n-1} ergibt die Rekursion

$$\mathbf{P}_\rho(X_n = c) = \sum_{b \in S} \mathbf{P}_\rho(X_{n-1} = b)\, P(b,c)$$

Mit

$$\pi_n(\cdot) := \mathbf{P}_\rho(X_n \in \cdot)\,, \quad n = 0, 1, \ldots$$

lautet diese Rekursion

$$\pi_n(c) = \sum_{b \in S} \pi_{n-1}(b) P(b,c)\,, \quad n \geq 1$$

Beispiel: Pólya-Urne

$$S = \{(w,b) : w,b \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$$

$$P((w,b),(w+1,b)) = \frac{w}{w+b}\,,$$

$$P((w,b),(w,b+1)) = \frac{b}{w+b}\,.$$

$$\rho((1,1)) := 1$$

$$\mathbf{P}_\rho(X_n = (a,b)) = ?$$

Zweischritt-Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P^2(a,c) := \mathbf{P}_a(X_2 = c)\ , \quad n \geq 0\ ,\ a, c \in S$$

Zerlegungen nach dem Zwischenschritt:

$$\mathbf{P}_a(X_2 = c) = \sum_{b \in S} \mathbf{P}_a(X_1 = b)\mathbf{P}_b(X_1 = c)$$

$$P^2(a,c) = \sum_{b \in S} P(a,b)\, P(b,c)$$

$P^2 = (P^2(a,c))_{a,c \in S}$ lässt sich also auffassen als

Produkt der Matrix P mit sich selbst.

Mehrschritt-Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P^n(a,c) := \mathbf{P}_a(X_n = c)\ , \quad n \geq 0\ ,\ a,c \in S$$

Zerlegung nach dem ersten Schritt:

$$P^n(a,c) = \sum_{b \in S} P(a,b)\, P^{n-1}(b,c)$$

Zerlegung nach dem letzten Schritt:

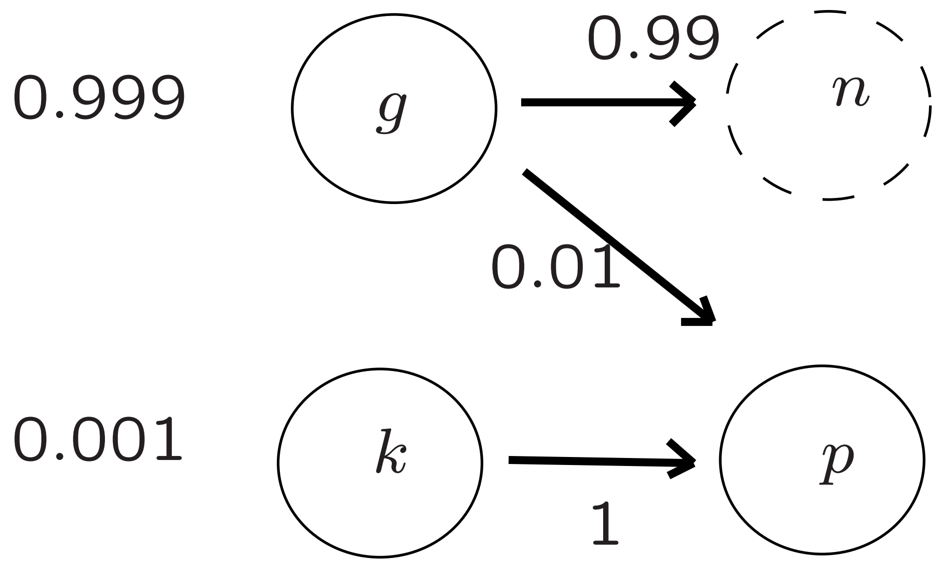
$$P^n(a,c) = \sum_{b \in S} P^{n-1}(a,b)\, P(b,c)$$

$P^n = (P^n(a,c))_{a,c \in S}$ lässt sich also auffassen als

n-te Matrixpotenz von P.

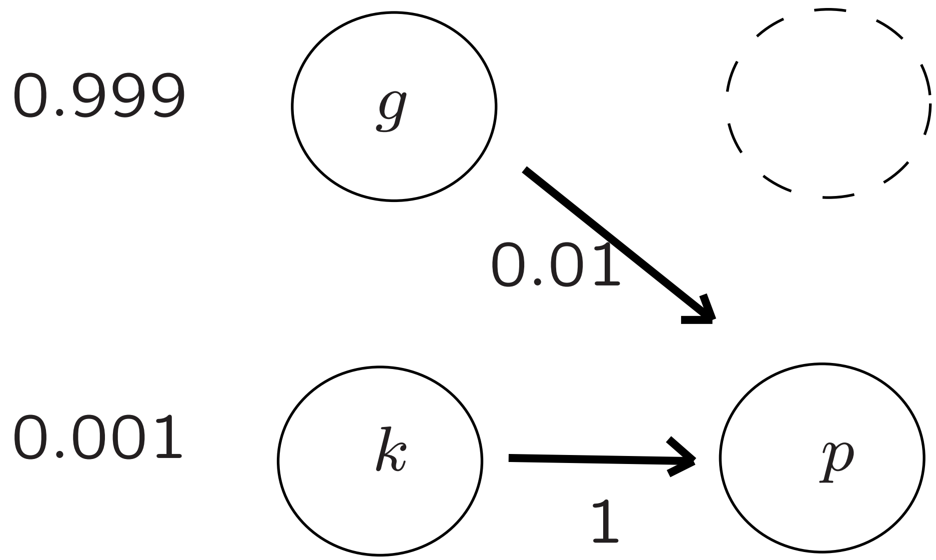
Beispiel:

Ein Blick zurück: Woher kam der Schritt?



$$\mathbf{P}(X_0 = g) = 0.99,\ \mathbf{P}(X_0 = k) = 0.01.$$

$$\mathbf{P}(X_0 = k | X_1 = p) =?$$



$$\frac{\mathbf{P}(X_0 = k, X_1 = p)}{\mathbf{P}(X_1 = p)} = \frac{0.001 \cdot 1}{0.999 \cdot 0.01 + 0.001 \cdot 1}$$

$$\approx \frac{1}{11}$$

Beispiel: Reihenuntersuchungen:

Eine kranke Person wird in 100% der Fälle positiv getestet,

eine gesunde Person in 1%.

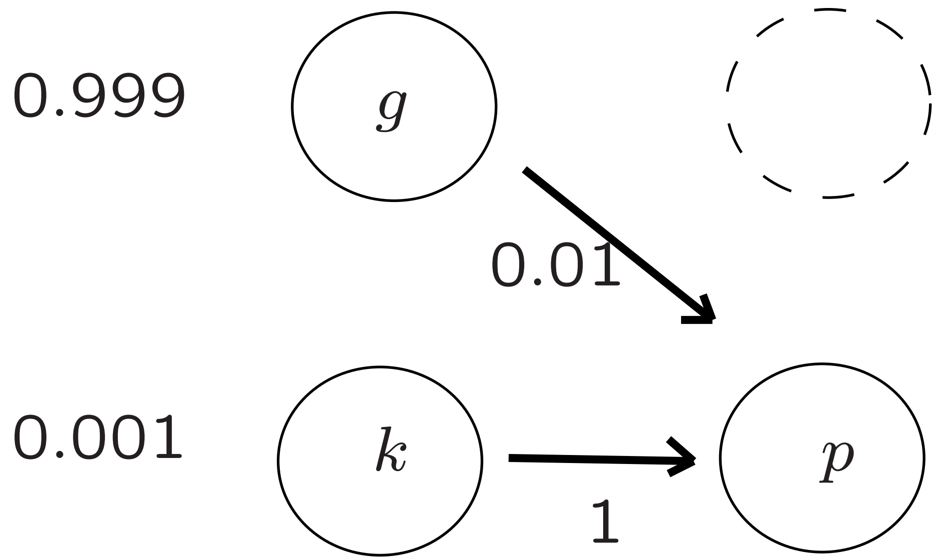
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv getestete Person wirklich krank ist?

Der Prozentsatz der kranken Personen sei 0.1% .

$$\mathbf{P}(E) = 0.001, \;\; \mathbf{P}(E' \,|\, E) = 1, \;\; \mathbf{P}(E' \,|\, E^c) = 0.01.$$

Bayes: $\mathbf{P}(E \,|\, E') = 0.091.$

Die Wahrscheinlichkeit, bei positivem Testbefund wirklich krank zu sein, liegt also bei nur 9%!



$$\frac{\mathbf{P}(X_0 = k, X_1 = p)}{\mathbf{P}(X_1 = p)} = \frac{0.001 \cdot 1}{0.999 \cdot 0.01 + 0.001 \cdot 1}$$

$$\approx \frac{1}{11}$$

Gleichgewichtsverteilungen

Eine Verteilung π auf S heißt

Gleichgewichtsverteilung zur Übergangsmatrix P,

wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(G1) $$\mathbf{P}_\pi(X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b)\ , \quad b \in S$$

(G2) $$\sum_{a \in S} \pi(a) P(a, b) = \pi(b)\ , \quad b \in S\ .$$

(Dann haben auch $X_2, X_3, \ldots$ die Verteilung π.)

Reversible Gleichgewichtsverteilungen

Hinreichend für

(G1)

$$\mathbf{P}_\pi(X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b)\ , \quad b \in S$$

ist die Bedingung

(R)

$$\mathbf{P}_\pi(X_0 = a, X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b, X_1 = a)\ , \quad a, b \in S$$

(Denn dann ist das Paar (X_0, X_1) so verteilt wie (X_1, X_0), also insbesondere X_0 so wie X_1.)

Gleichbedeutend mit

(R)

$$\mathbf{P}_\pi(X_0 = a, X_1 = b) = \mathbf{P}_\pi(X_0 = b, X_1 = a)\ , \quad a, b \in S$$

ist

$$\pi(a)P(a,b) = \pi(b)P(b,a)\ , \quad a, b \in S\ .$$

π heißt dann *reversible Gleichgewichtsverteilung* zu P.

Beispiel

für eine nicht reversible Gleichgewichtsverteilung:

Zyklische Irrfahrt auf $S = \{a, b, c\}$, mit

$$P(a, b) = P(b, c) = P(c, a) := p,$$

$$P(b, a) = P(c, b) = P(a, c) := 1 - p$$

Die uniforme Verteilung auf S

ist eine Gleichgewichtsverteilung zu P.

Nur für $p = 1/2$ ist sie reversibel.

Beispiel:

Die einfache Irrfahrt auf dem Würfel $S = \{0, 1\}^3$:

Von jedem $a \in S$ geht man in einem Schritt
zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarn.
(Zwei Elemente von S heißen *benachbart*,
wenn sie sich in genau einer Komponente unterscheiden.)
Für benachbarte Knoten a und b ist hier $P(a, b) = 1/3$.

Die uniforme Verteilung auf S
ist reversible Gleichgewichtsverteilung.

Beispiel:

Die einfache Irrfahrt

auf einem ungerichteten, zusammenhängenden Graphen

mit endlicher Knotenmenge S:

Von jedem $a \in S$ geht man in einem Schritt

zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarn.

Ist n_a die Anzahl der Nachbarn des Knotens a,

dann definiert $\pi_a := \frac{n_a}{c}, \quad a \in S$

(mit $c = \sum_{k \in S} n_k$)

eine reversible Gleichgewichtsverteilung.

Ist n_a die Anzahl der Nachbarn des Knotens a,

dann definiert $\pi_a := \frac{n_a}{c}, \quad a \in S$

eine reversible Gleichgewichtsverteilung.

In der Tat ist für diesen Ansatz

die Reversibilitätsbedingung (R) erfüllt.

Denn für benachbarte Knoten a, b gilt:

$$\pi_a P_{ab} \frac{1}{c} n_a \frac{1}{n_a} = \frac{1}{c} n_b \frac{1}{n_a} = \pi_b P_{ba}$$

Man kann zeigen (hier ohne Beweis)

dass das die einzige Gleichgewichtsverteilung ist.

Beispiel: Das Ehrenfest-Modell,

erfunden 1905 von Paul und Tatjana Ehrenfest

als Spielzeugmodell für Boltzmanns Statistische Mechanik:

d Teilchen sind verteilt auf eine linke und eine rechte Urne:

ℓ Teilchen links, r Teilchen rechts.

In jedem Schritt wird rein zufällig eines aus den d

ausgewählt und in die andere Urne verfrachtet.

Die Übergangsw'keiten für die *Anzahl links* sind somit:

$$P(\ell, \ell+1) = \frac{d-\ell}{d}\,, \qquad P(\ell, \ell-1) = \frac{\ell}{d}\,.$$

Hat diese Dynamik eine (reversible)

Gleichgewichtsverteilung,

und wenn ja, wie sieht sie aus?

Ein eleganter Weg zur Antwort führt über ein *Feinmodell*:

Die Teilchen werden durchnummeriert mit $1, \ldots, d$.

$a_i = 1$ falls das Teilchen mit Nr. i in linker Urne,

$= 0$ ...... in rechter Urne.

$$a := (a_1, \ldots, a_d) \in \{0, 1\}^d.$$

Dynamik des Feinmodells:

Ein $i \in \{1, \ldots, d\}$ wird rein zufällig ausgewählt

und das a_i wird “geflippt”

(von 0 nach 1 bzw. von 1 nach 0).

Das ergibt die Irrfahrt auf dem Würfel $\{0, 1\}^d$.

Diese hat ein reversibles Gleichgewicht:

die uniforme Verteilung.

Vom Feinmodell zum Ehrenfest-Modell kommt man durch

“Zählen der Teilchen links”:

$$l(a) := \sum_{i=1}^{d} a_i$$

Ist $Z = (Z^{(1)}, \ldots, Z^{(d)})$ uniform verteilt auf $\{0, 1\}^d$,

dann ist $\sum_{i=1}^{d} Z^{(i)}$ Binomial(d, $\frac{1}{2}$)-verteilt.

Zur Probe: Die Binomial(d, $\frac{1}{2}$)-Verteilung

ist ein reversibles Gleichgewicht für das Ehrenfest-Modell:

$$2^{-d}\binom{d}{\ell}\,\frac{d-\ell}{d} = 2^{-d}\binom{d}{\ell+1}\,\frac{\ell+1}{d}.\ \Box$$