Vorlesung 9a

Mehrstufige Zufallsexperimente

und

Markovketten (Teil 1)

bisher: von “heute” zu “morgen”

jetzt: von “heute und morgen” zu “übermorgen”, etc.

Für jedes $i = 1, \ldots, n-1$ hat man

Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(a_1 \ldots a_i, a_{i+1}) = \mathbf{P}_{a_1 \ldots a_i}(X_{i+1} = a_{i+1}) ,$$

die angeben,

mit welcher Wahrscheinlichkeit in der $(i+1)$-ten Stufe

das Ereignis $\{X_{i+1} = a_{i+1}\}$ eintritt,

gegeben das Eintreten von $\{X_1 = a_1, \ldots, X_i = a_i\}$.

Die gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_n$

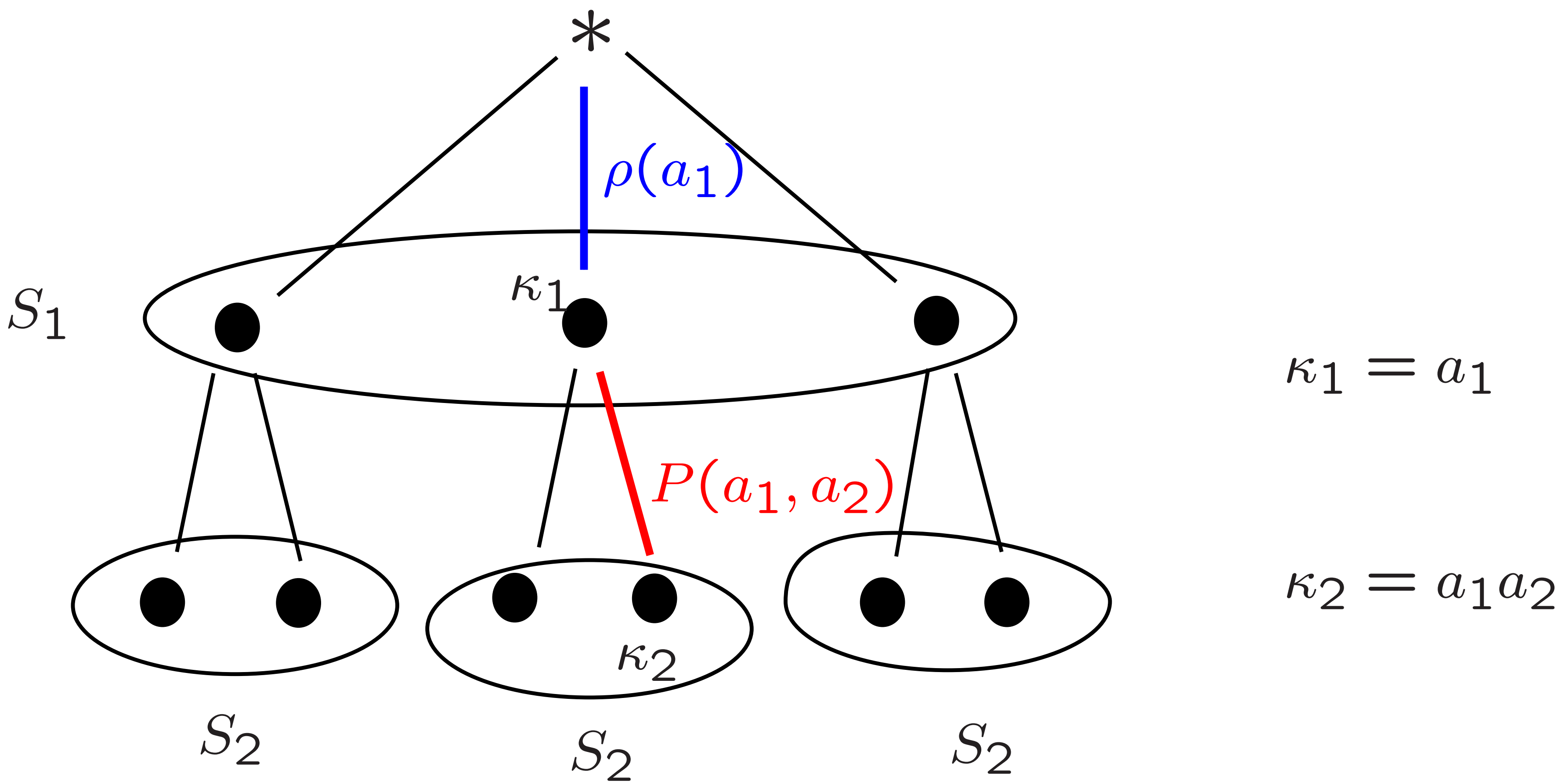
ergibt sich rekursiv als

Multiplikationsregel

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n)$$
$$= \mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_{n-1} = a_{n-1}) P(a_1 \ldots a_{n-1}, a_n)$$
$$= \rho(a_1) P(a_1, a_2) \cdots P(a_1 \ldots a_{n-1}, a_n) \, .$$

Veranschaulichung von zweistufigen Experimenten

durch *Bäume*:



$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \rho(a_1)P(a_1, a_2)\,.$$

(Produkt der Kantengewichte von $*$ zum Knoten κ_2)

Veranschaulichung von mehrstufigen Experimenten durch *Bäume*:

$\kappa_i = a_1 \dots a_i$ ist ein *Knoten der Tiefe* i

Die *Nachfolger* von κ_i sind von der Form $\kappa_i \, a_{i+1}$

Die *Kanten* des Baums erhalten die Gewichte

$$g(*, \kappa_1) := \rho(a_1) \ , \quad g(\kappa_i, \kappa_{i+1}) := P(a_1 \dots a_i, a_{i+1})$$

mit $\kappa_1 = a_1, \ \ \kappa_i = a_1 \dots a_i, \ \ \kappa_{i+1} = a_1 \dots a_{i+1}$.

Die Wahrscheinlichkeit, in einem bestimmten Blatt zu enden, ergibt sich als Produkt der Kantengewichte entlang des Weges von der Wurzel zum Blatt.

Eine wichtige Beispielklasse mehrstufiger Zufallsexperimente

ist die, bei der

die Übergangswahrscheinlichkeiten der nächsten Stufe

nur von der aktuellen Stufe abhängen

(und nicht von den vorhergehenden):

$$P(\ldots a_{i-2}\, a_{i-1}, a_i) = P(a_{i-1}, a_i)$$

In dem Fall spricht man von einer **Markovkette**

mit Übergangsmatrix P.

Die Stufen sind jetzt mit $i = 0, 1, 2, \ldots$ indiziert.

Man denkt sich die Übergangsmatrix P als fest

und notiert die Verteilung ρ von X_0 (die “Startverteilung”)

als Subskript bei der Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}$.

Die Multiplikationsregel ergibt:

$$\mathbf{P}_\rho(X_0 = a_0, \ldots, X_n = a_n)$$
$$= \rho(a_0) P(a_0, a_1) \cdots P(a_{n-1}, a_n)$$

Startet die Kette in $a \in S$,

dann ist ρ die auf a konzentrierte Verteilung

(notiert als $\rho = \delta_a$).

Statt $\mathbf{P}_{\delta_a}$ schreibt man auch $\mathbf{P}_a$

und erhält

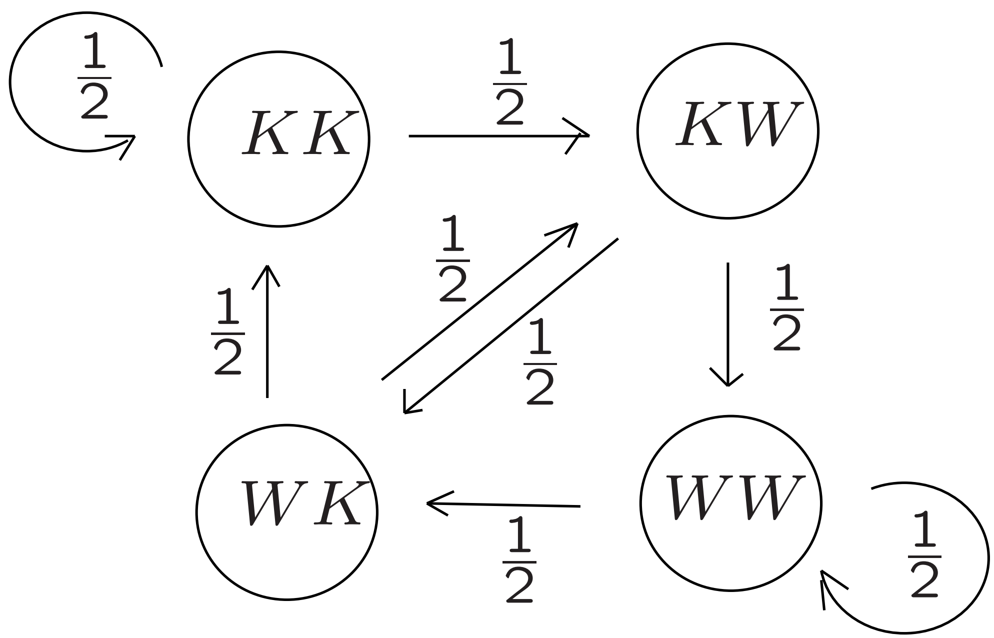
$$\mathbf{P}_a(X_0 = a) = 1,$$

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n) = P(a, a_1) \cdots P(a_{n-1}, a_n) .$$

Beispiel 1:

Muster der Länge 2 beim fairen Münzwurf

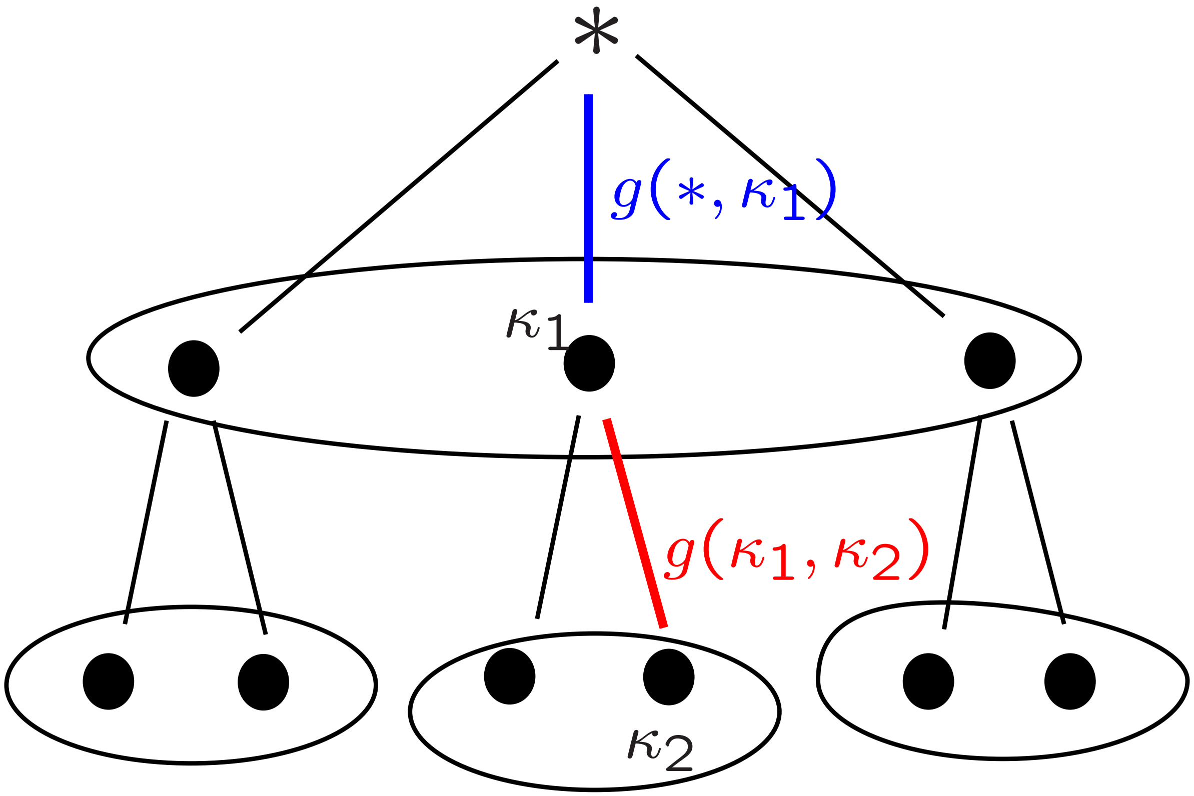
Graph der Übergangswahrscheinlichkeiten:



Beispiel 2:

Zufällige Wanderung durch einen Baum

von der Wurzel zur Krone



$$\mathbf{P}(X_1 = \kappa_1, X_2 = \kappa_2) = g(*, \kappa_1) \cdot g(\kappa_1, \kappa_2)\,.$$

(Produkt der Kantengewichte von $*$ zum Knoten κ_2)

Beispiel 2:

Zufällige Wanderung durch einen Baum

von der Wurzel zur Krone

Die Zustände sind die Knoten;

die Übergangswahrscheinlichkeiten sind die Kantengewichte:

$$P(\kappa, \kappa') := \begin{cases} g(\kappa, \kappa'), & \text{falls } \kappa' \text{ Nachfolger von } \kappa, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Blätter werden zu *absorbierenden Zuständen*.

Beispiel 3:

(p, q)-Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$:

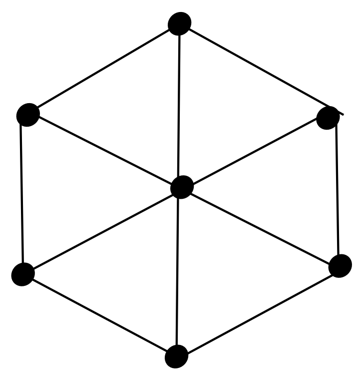
$$S = \mathbb{Z}$$

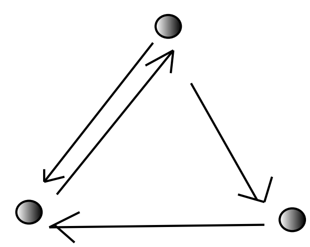
$$P(k, k+1) = p, \quad P(k, k-1) = 1 - p =: q$$

Beispiel 4:

Einfache Irrfahrt

auf einem (ungerichteten oder gerichteten) Graphen





$S :=$ die Menge der Knoten.

Der nächste Schritt erfolgt jeweils

zu einem rein zufälliger ausgewählten Nachbarn.

Beispiel 5:

Pólya-Urne

$$S = \{(w,b) : w,b \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$$

$$P((w,b),(w+1,b)) = \frac{w}{w+b}\,,$$

$$P((w,b),(w,b+1)) = \frac{b}{w+b}\,.$$

Zur Erinnerung:

Für eine Markovkette $X = (X_0, X_1, \ldots)$

mit Start in a und Übergangsmatrix P

hat man die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n)$$
$$= P(a, a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, a_n).$$

Zerlegung nach dem ersten Schritt.

$$\mathbf{P}_a(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n)$$

$$= P(a, a_1)P(a_1, a_2) \cdots P(a_{n-1}, a_n)$$

$$= P(a, a_1)\mathbf{P}_{a_1}(X_1 = a_2, \ldots, X_{n-1} = a_n)$$

Summation über $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$,

mit b statt a_1 und c statt a_n:

$$\mathbf{P}_a(X_n = c) = \sum_{b \in S} P(a, b)\, \mathbf{P}_b(X_{n-1} = c)\ .$$

Treffwahrscheinlichkeiten

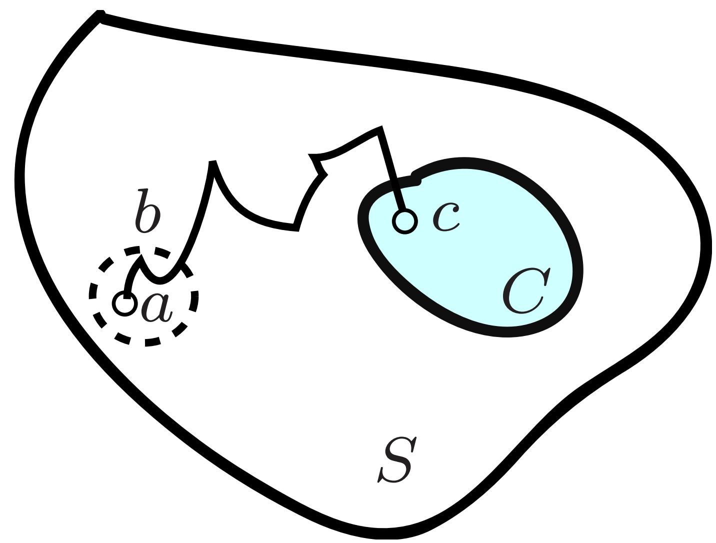
Die Antwort:

Sei $w(a)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die $w(a)$, $a \in S$, erfüllen das Gleichungssystem

$$\sum_{b \in S} P(a,b)w(b) = w(a)$$

für $a \in S \setminus C$



Treffwahrscheinlichkeiten

Die Antwort:

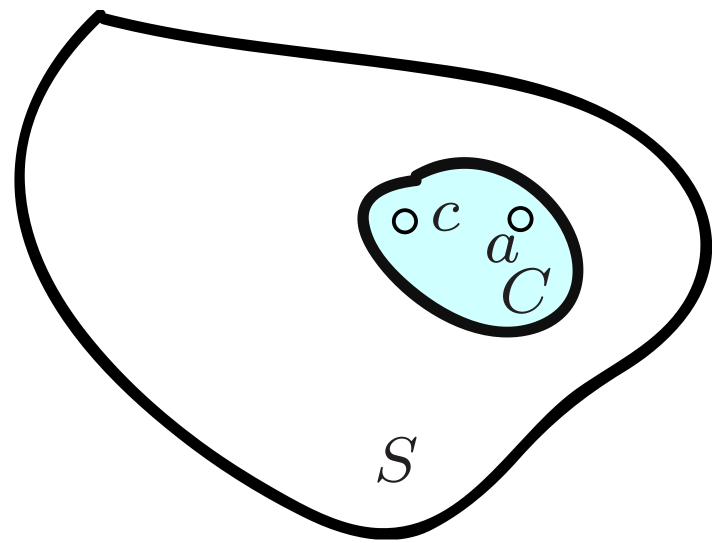
Sei $w(a)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die $w(a)$, $a \in S$, erfüllen das Gleichungssystem

$$\sum_{b \in S} P(a,b)w(b) = w(a)$$

für $a \in S \setminus C$,

$w(a) = \delta_{ac}$ für $a \in C$.

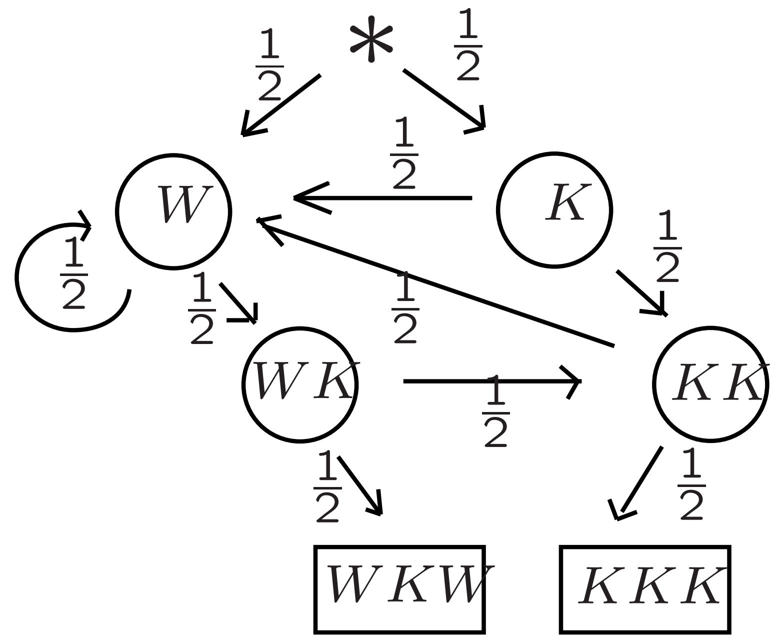


Beispiel A

Welches Muster kommt eher?

Mit welcher W'keit kommt beim fairen Münzwurf das Muster KKK früher als das Muster WKW?

Hier ist ein "reduzierter Graph" der relevanten Zustände und Übergänge:

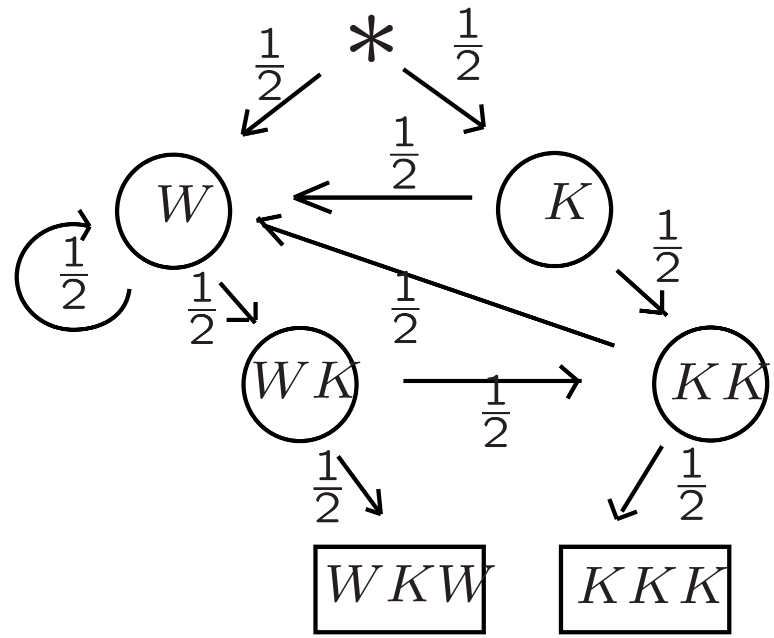


Für $w(a) :=$

$\mathbf{P}_a(\text{Spiel endet in } KKK)$

ergibt sich das

Gleichungssystem



$$w(KK) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}w(W)\,, \quad w(WK) = \tfrac{1}{2}w(KK)$$

$$w(K) = \tfrac{1}{2}w(KK) + \tfrac{1}{2}w(W)\,, \quad w(W) = \tfrac{1}{2}w(WK) + \tfrac{1}{2}w(W)\,.$$

und daraus

$$w(W) = \tfrac{1}{3},\, w(K) = \tfrac{1}{2},\;\; w(*) = \tfrac{1}{2}w(W) + \tfrac{1}{2}w(K) = \tfrac{5}{12}\,.$$

Beispiel B: **Gewinn oder Ruin?**

Eine einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ starte im Punkt 3.

Mit welcher W'keit erreicht sie den Punkt $c = 10$,

bevor sie zum Nullpunkt kommt?

"Zerlegung nach dem ersten Schritt" und Randbedingungen:

$$w(a) = \frac{1}{2}w(a-1) + \frac{1}{2}w(a+1)\,, \quad a = 1, \ldots, c-1\,,$$

$$w(0) = 0, \quad w(c) = 1.$$

Fazit: Die $w(a)$ liegen auf einer Geraden,

$$w(a) = \beta a + \gamma \quad \text{mit } \gamma = 0, \beta = 1/c.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $3/10$.

Erwartete Treffzeiten

Sei X eine Markovkette mit Zustandsraum S und Übergangsmatrix P.

Für eine Teilmenge $C \subset S$ ist

$$T_C = \min\{n : n \geq 0, X_n \in C\}$$

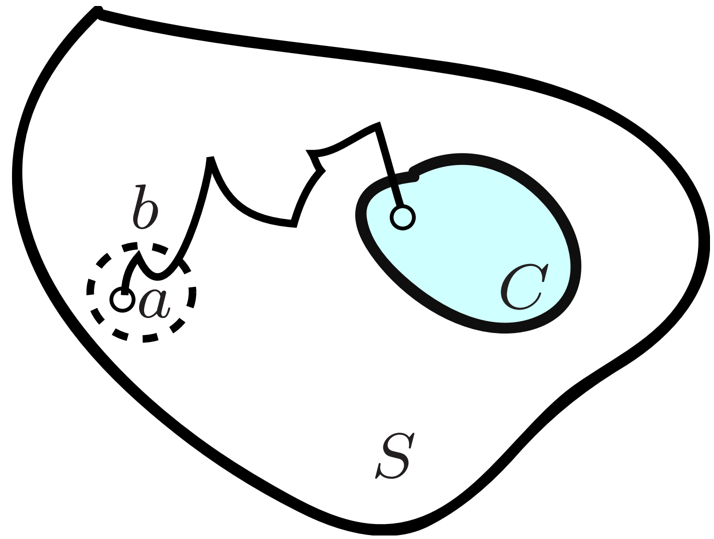
die erste Treffzeit von C.

Es geht um die Berechnung von $\mathbf{E}_a[T_C]$:

Für $a \notin C$

Zerlegung von $\mathbf{E}_a[T_C]$

nach dem ersten Schritt:



Erst ein Schritt

von a nach b gemäß $P(a,b)$,

dann “Neustart” in b:

$$\mathbf{E}_a[T_C] = 1 + \sum_{b \in S} P(a,b)\, \mathbf{E}_b[T_C]$$

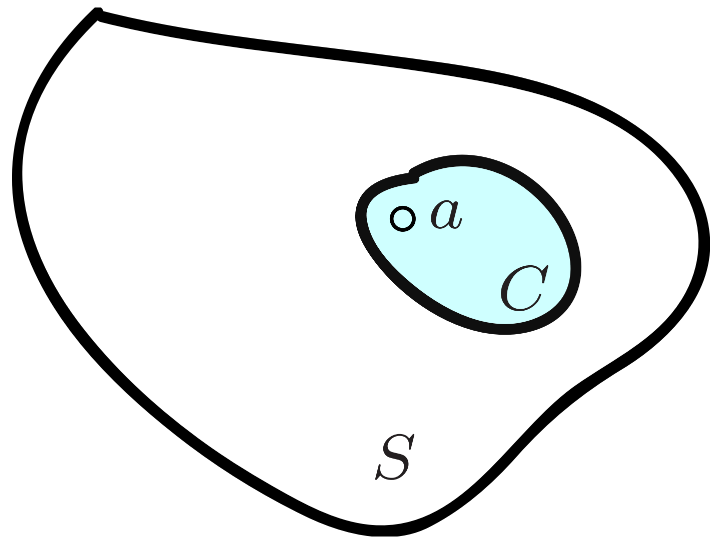
(Formales Argument hierfür: siehe Buch Seite 106.)

Und für $a \in C$

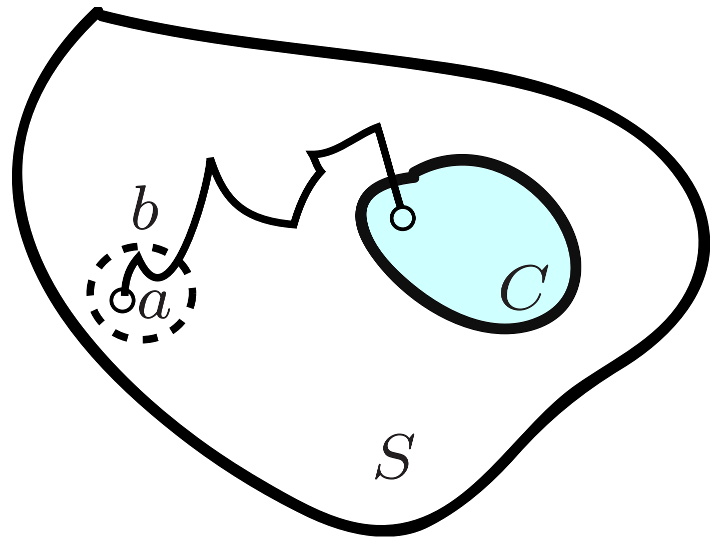
ist $\mathbf{P}_a(T_C = 0) = 1$,

also

$\mathbf{E}_a[T_C] = 0$.



Fazit:



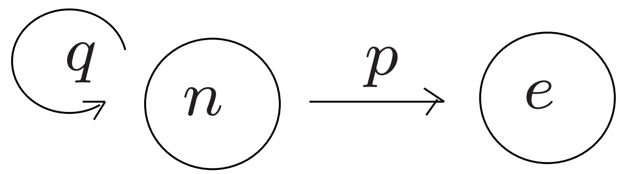
$a \mapsto e(a) := \mathbf{E}_a[T_C]$ erfüllt das Gleichungssystem

$$\mathbf{e}(a) = 1 + \sum_{b \in S} P(a,b)\, e(b) \quad \text{für } a \notin C,$$

$$\mathbf{e}(a) = 0 \quad \text{für } a \in C.$$

Beispiel:

Erwartete Zeit bis zum ersten Erfolg.



$$\mathbf{E}_n[T_e] = 1 + q\mathbf{E}_n[T_e] + p\mathbf{E}_e[T_e] \ .$$

Wegen $\mathbf{E}_e[T_e] = 0$ wird dies gelöst durch

$$\mathbf{E}_n[T_e] = 1/p.$$