Vorlesung 6a

Vorlesung 6a

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 2:

Die Normalverteilung.

Wir erinnern uns (Vorlesung 3b):

Die geometrische Verteilung mit kleinem p

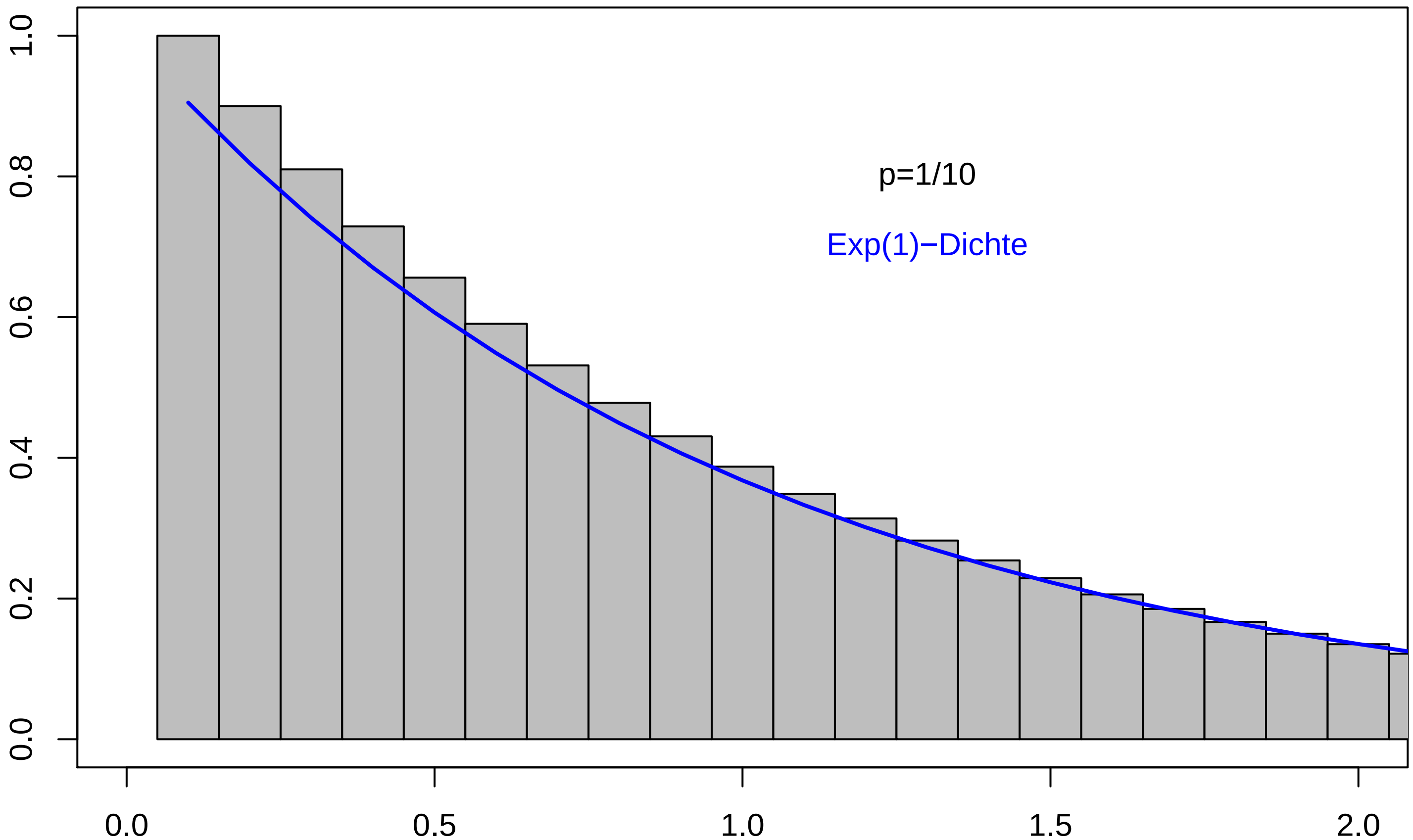
und dementsprechend großem Erwartungswert $1/p$

“holt man ins Bild”, indem man mit p “skaliert”.

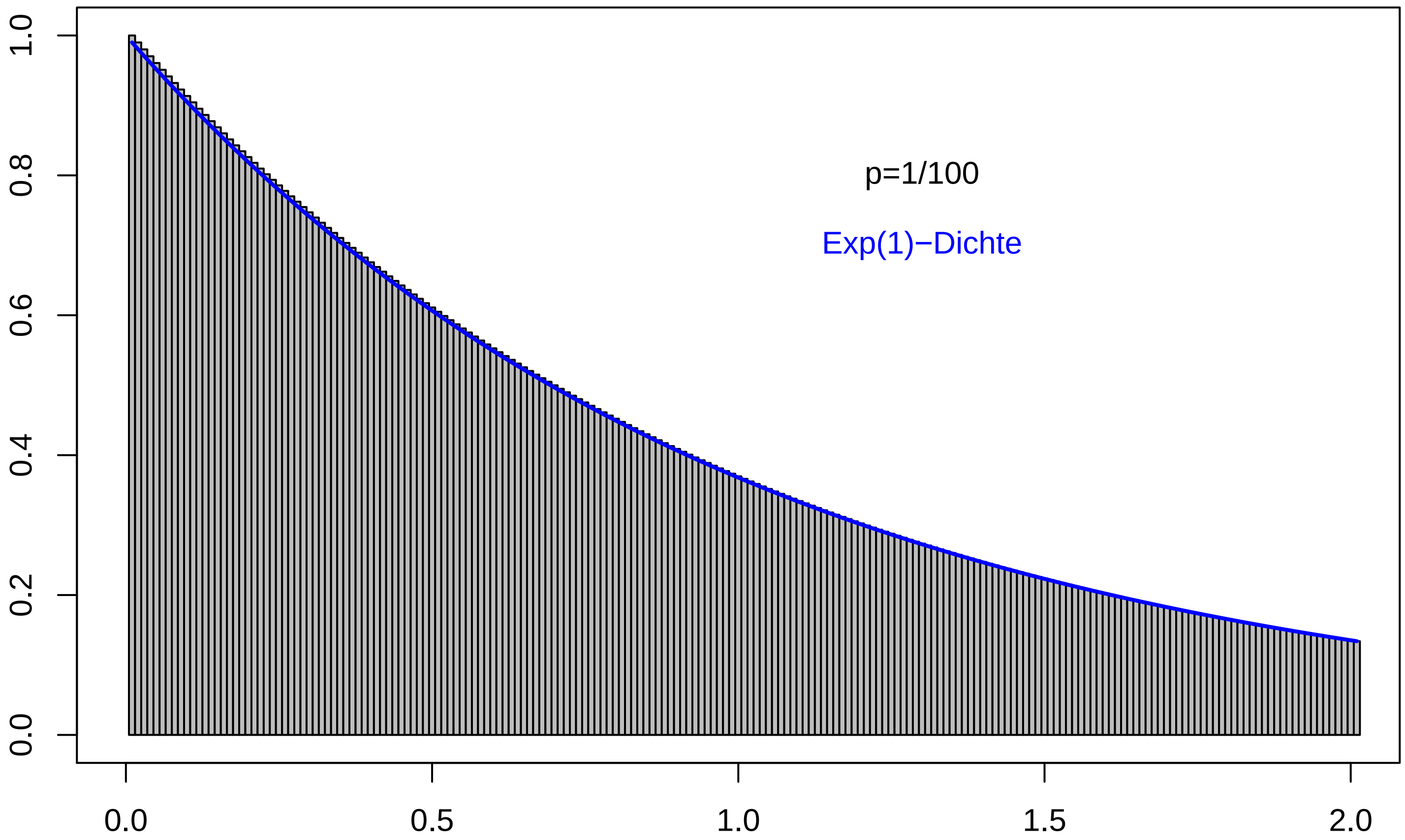
So tritt im Grenzwert $p \to 0$ die

Standard-Exponentialverteilung auf den Plan (Vorlesung 5a).

Gewichte des p−fachen einer Geom(p)−verteilten ZV



Gewichte des p−fachen einer Geom(p)−verteilten ZV



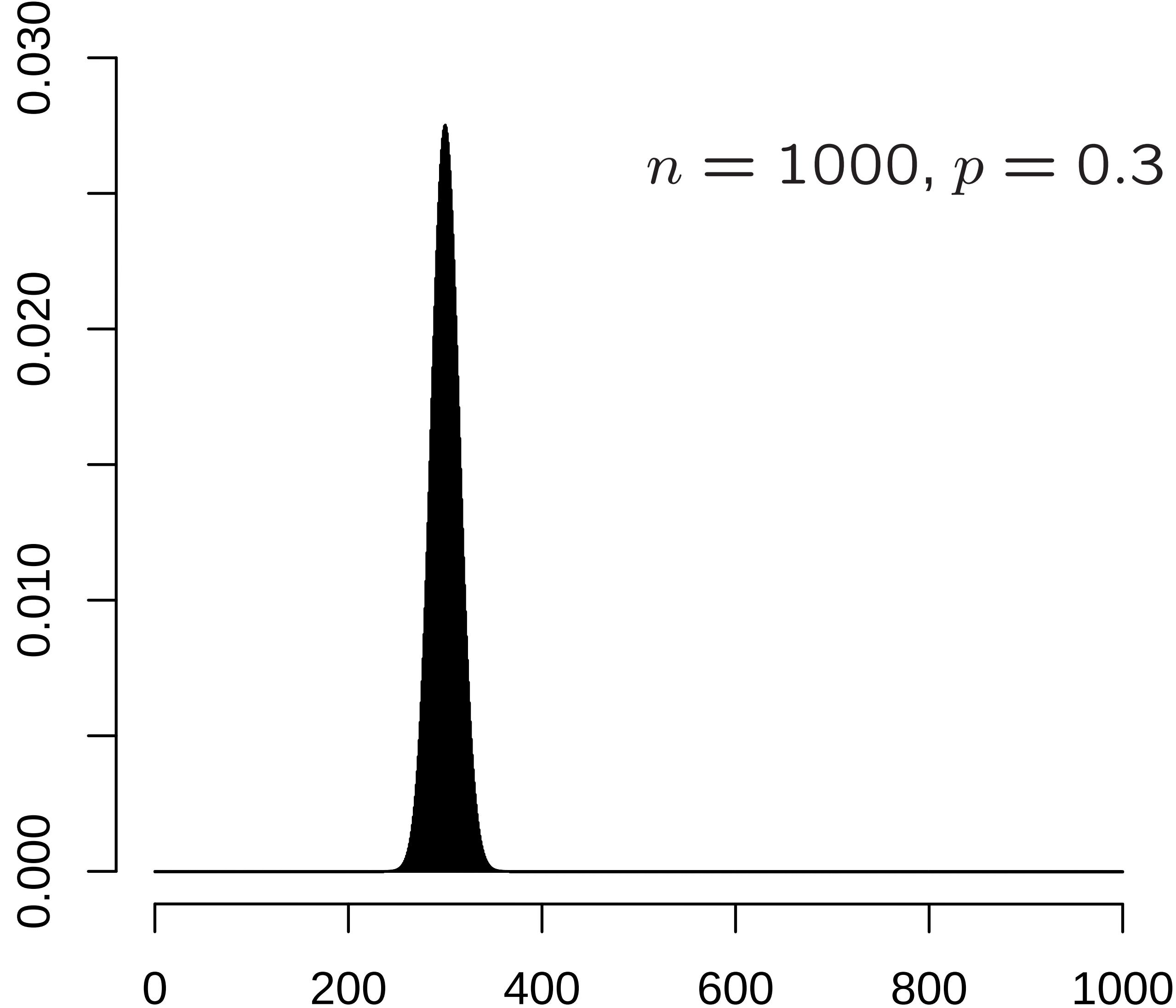
Wie sieht die Bin($n, 1/2$)-Verteilung

für großes n aus,

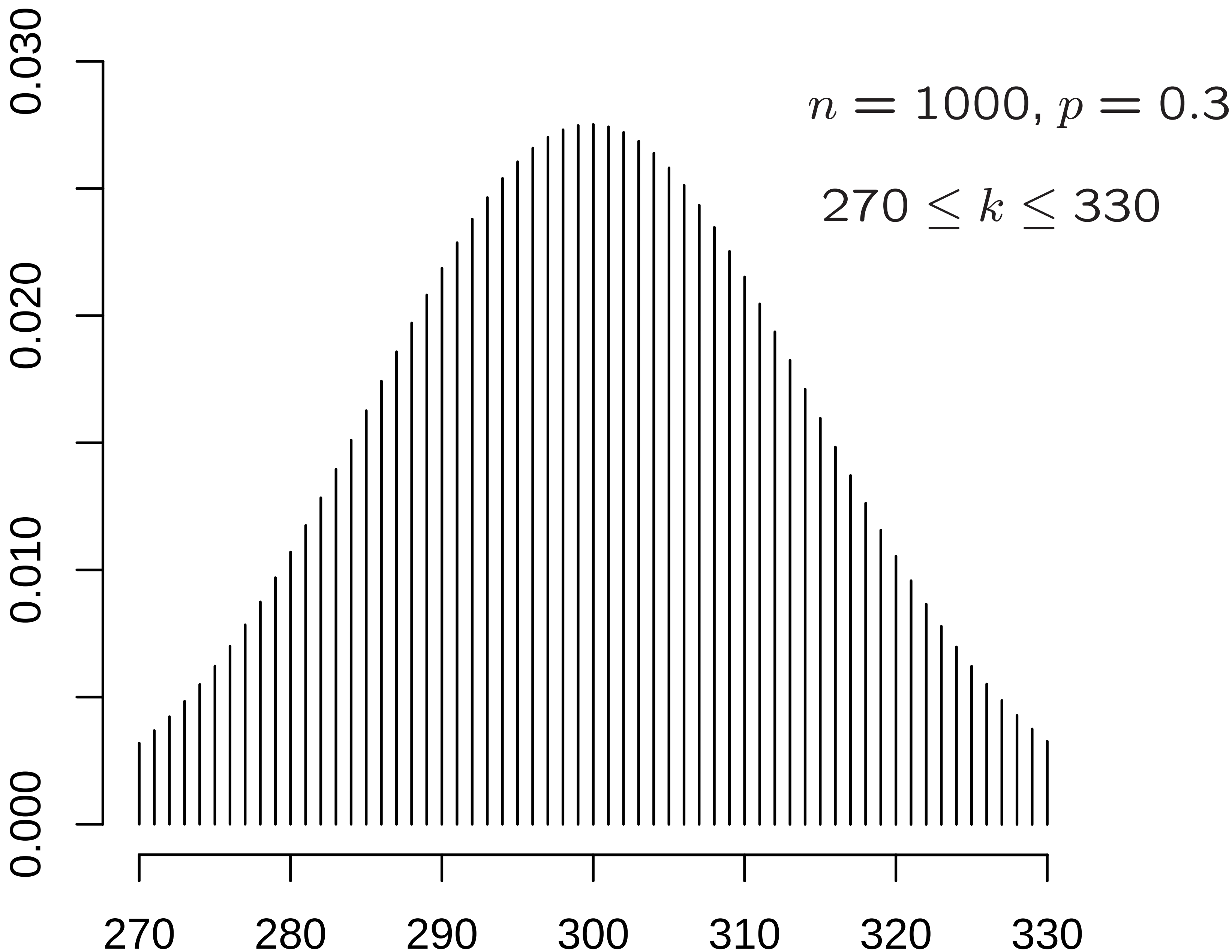
oder allgemeiner

die Bin(n, p)-Verteilung

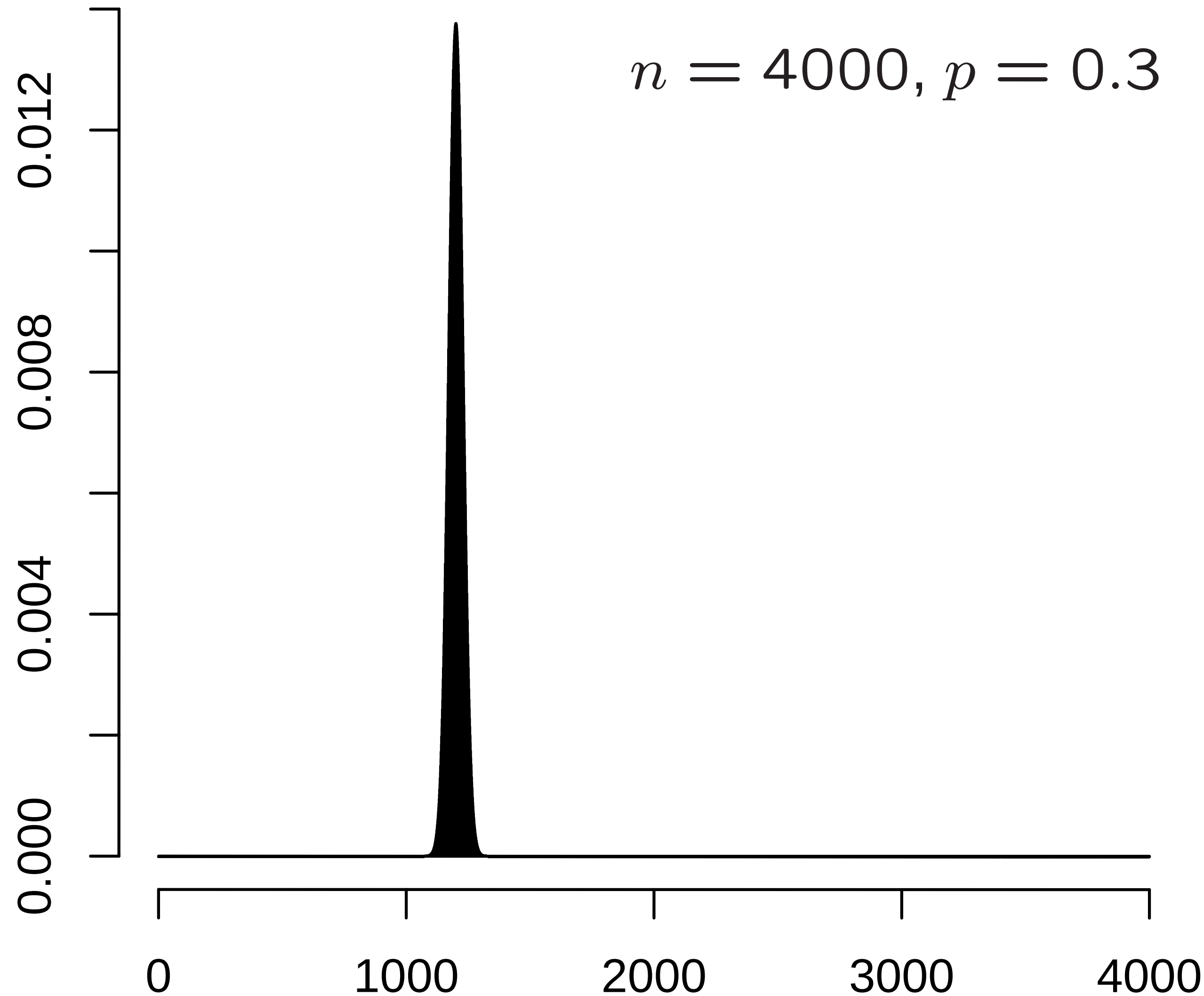
mit großem n und großem npq ?



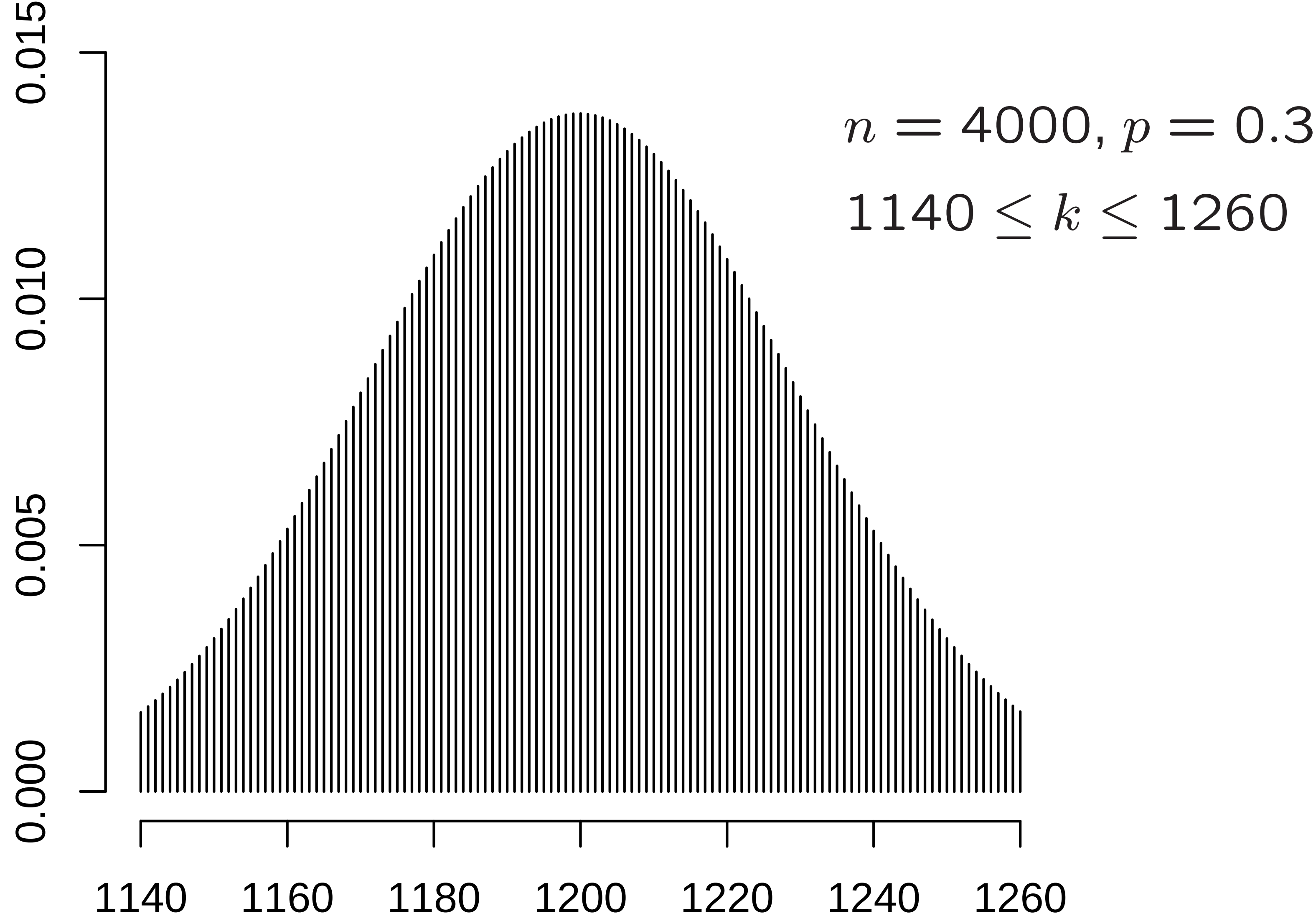
$n = 1000, p = 0.3$
0.000
0.010
0.020
0.030
0
200
400
600
800
1000



$n = 1000, p = 0.3$
$270 \leq k \leq 330$
0.000
0.010
0.020
0.030
270
280
290
300
310
320
330



$n = 4000, p = 0.3$
0.000
0.004
0.008
0.012
0
1000
2000
3000
4000



$n = 4000, p = 0.3$
$1140 \leq k \leq 1260$
0.000
0.005
0.010
0.015
1140
1160
1180
1200
1220
1240
1260

Binomialverteilungen mit großem n und großer Varianz npq

sehen “glockenförmig” aus,

wenn man sie geeignet “ins Bild holt”.

Dahinter steht eine Approximation der Binomialgewichte

mit “Stirling & Taylor”:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2\right).$$

mit $\mu := np$, $\sigma := \sqrt{npq}$

Dahinter steht eine Approximation der Binomialgewichte

mit “Stirling & Taylor”:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \approx \quad \frac{1}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{k-\mu}{\sigma}\Big)^2\Big) \; .$$

$$= \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$$

mit $\mu := np$, $\sigma := \sqrt{npq}$ und

$$\varphi(a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

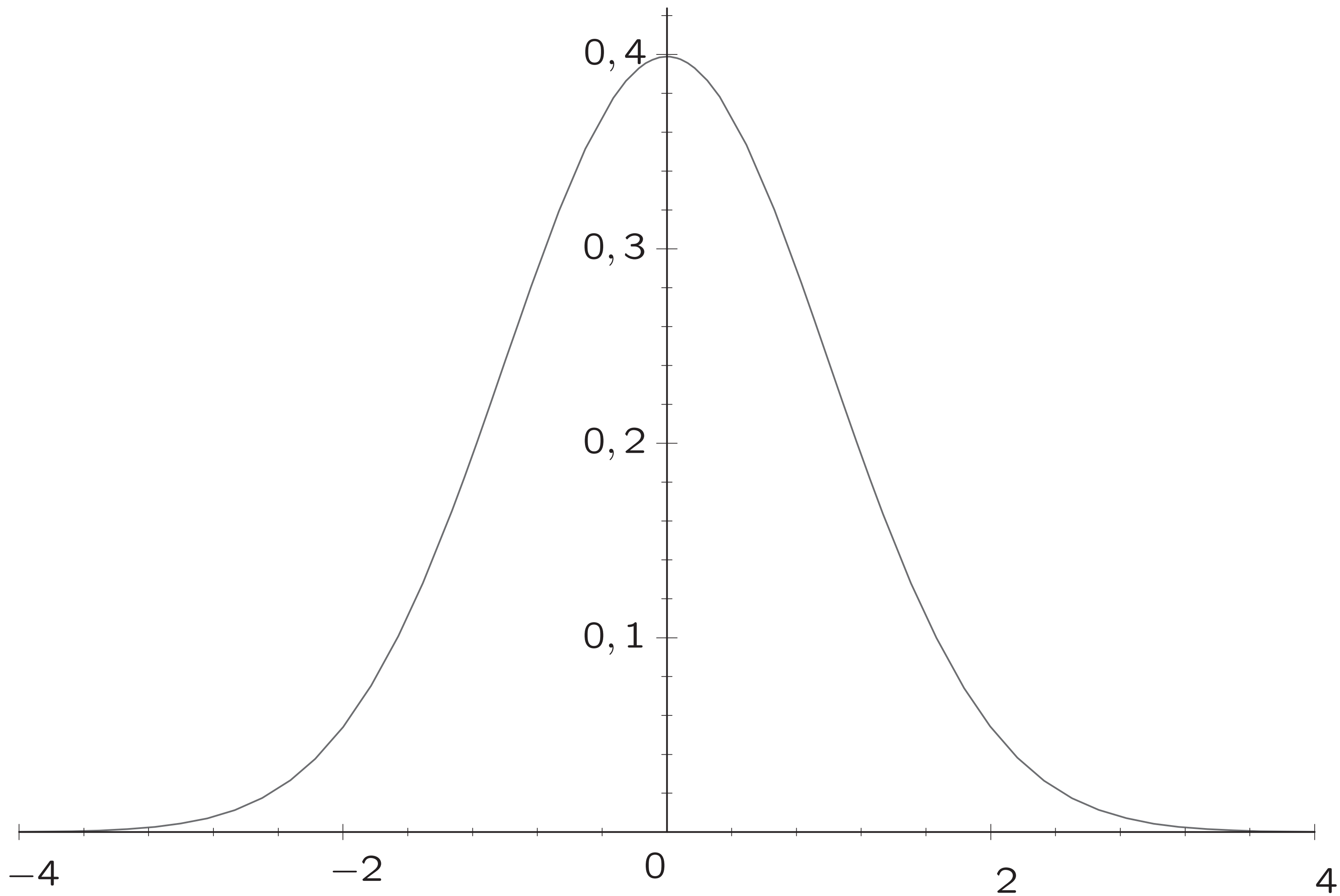
Die nächste Definition beinhaltet

die wichtigste Verteilung der Stochastik:

Eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$\boxed{\varphi(a)\, da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}\, da}$$

heißt standard-normalverteilt.


0, 4
0, 3
0, 2
0, 1
−4
−2
0
2
4

Nebenbei überzeugen wir uns, dass gilt

$$I := \int_{\mathbb{R}} \varphi(a)\, da = 1.$$

In der Tat ergibt der Übergang zu Polarkoordinaten:

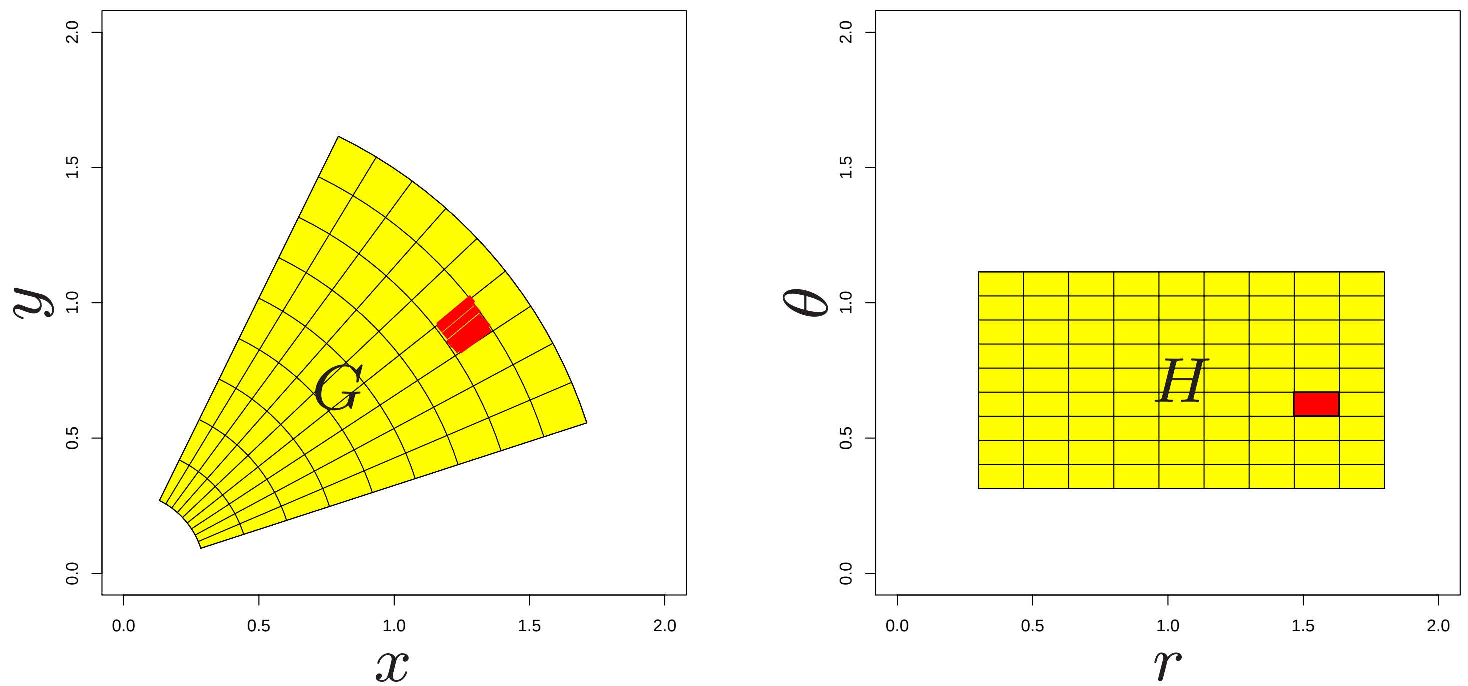
$$I^2 = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, dy = \iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dx\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= -e^{-r^2/2}\Big|_0^{\infty} = 1. \quad \square$$

Zur Illustration der Polarkoordinatentransformation:

$$\iint\limits_G e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy = \iint\limits_H e^{-r^2/2}\, r\, dr\, d\theta$$



Für ein standard-normalverteiltes Z ist

$$\mathbf{E}[Z] = 0, \quad \mathbf{Var}\, Z = 1.$$

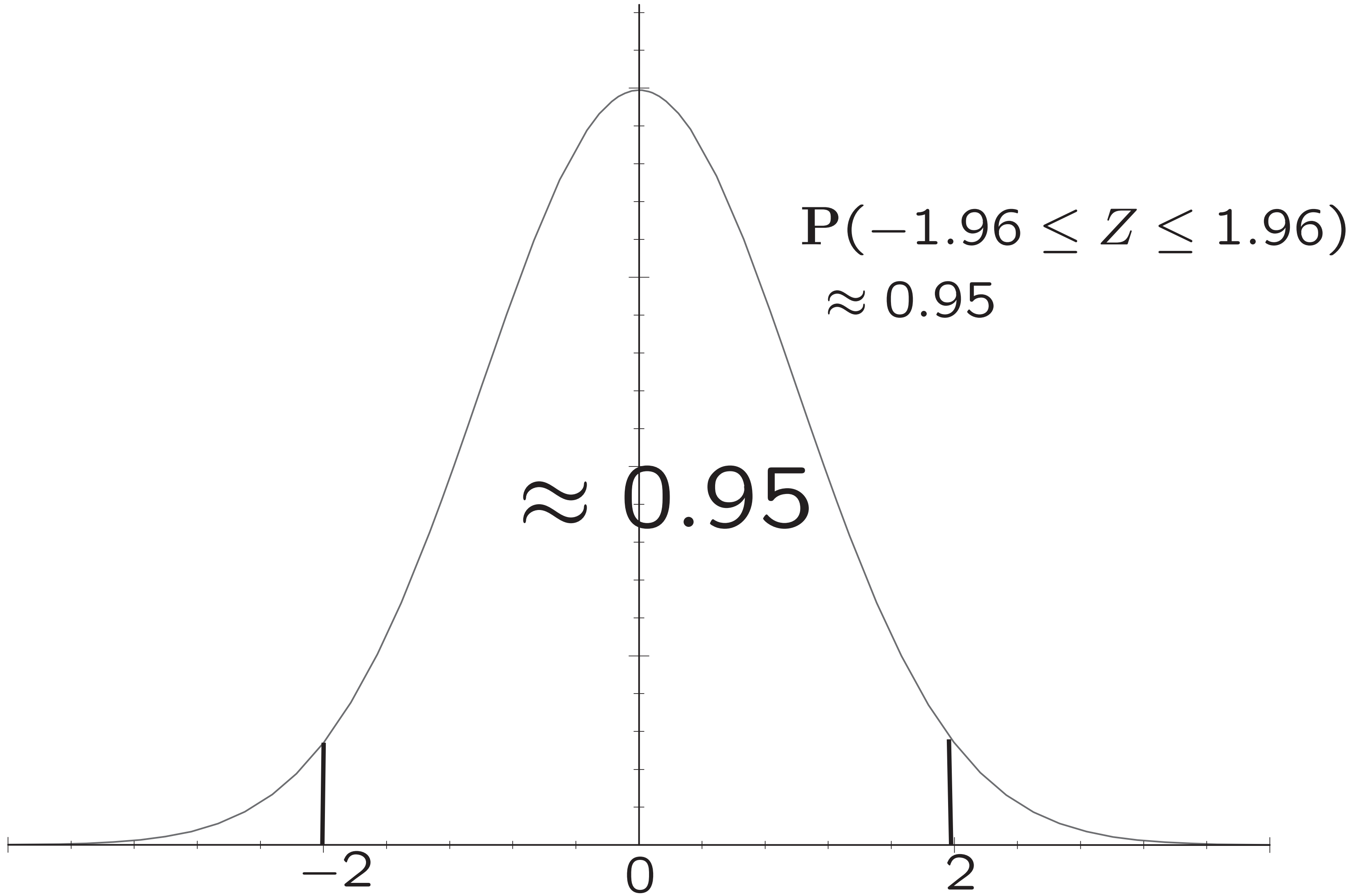
Denn aus Symmetriegründen ist $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} a\, e^{-a^2/2}\, da = 0$,

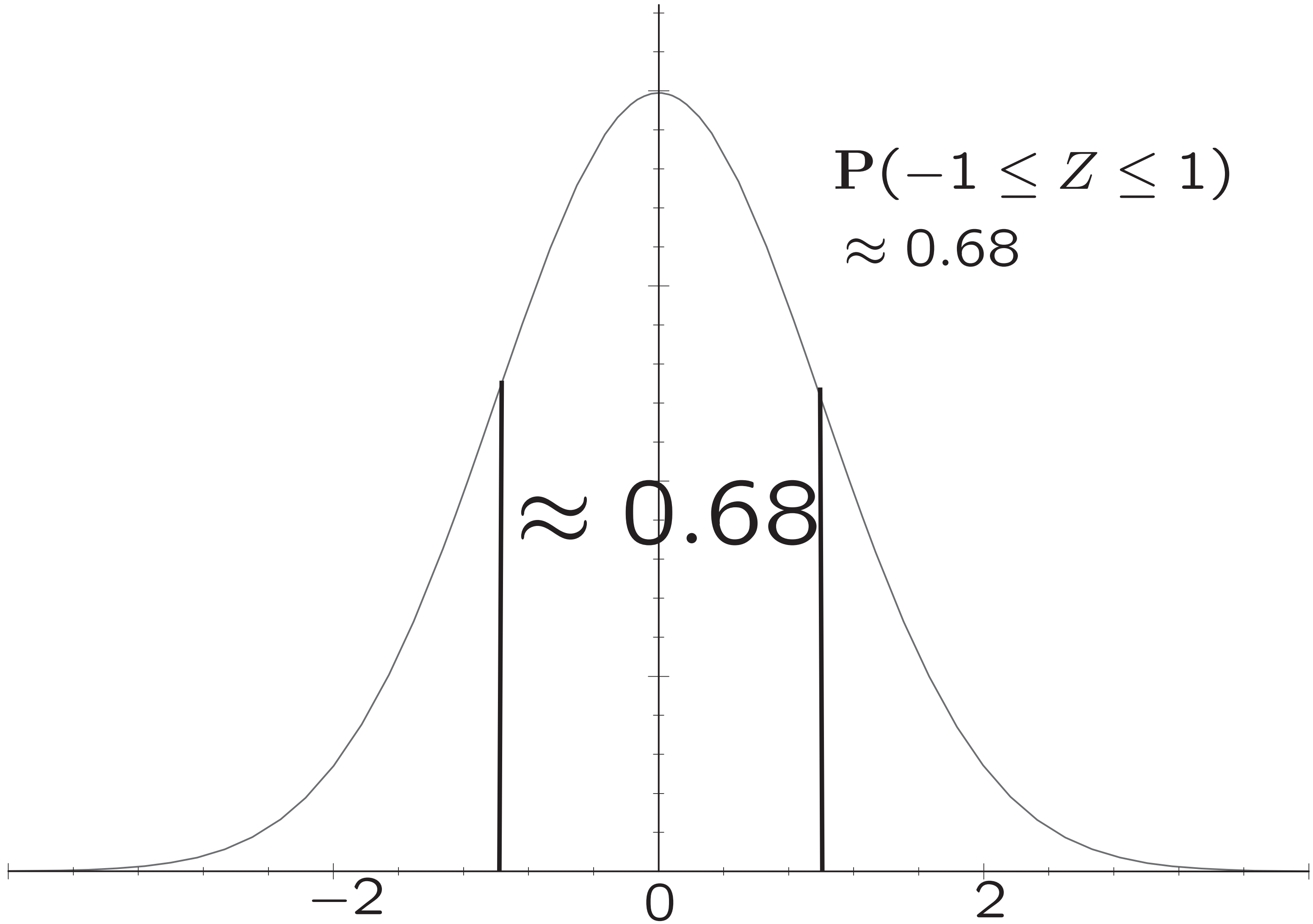
und mit partieller Integration bekommt man

$$\int_{\mathbb{R}} a^2\, e^{-a^2/2}\, da = \int_{\mathbb{R}} a\, a e^{-a^2/2}\, da$$

$$= -a\, e^{-a^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} e^{-a^2/2}\, da = \sqrt{2\pi}.$$

Zwei für die Praxis wichtige Zahlen:


$P(-1.96 \le Z \le 1.96)$
≈ 0.95
≈ 0.95
-2
0
2



$\mathbf{P}(-1 \leq Z \leq 1)$
≈ 0.68
≈ 0.68
-2
0
2

Sei Z standard-normalverteilt, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Dann gilt für

$$X := \sigma Z + \mu \ :$$

$$\mathbf{E}[X] = \mu, \quad \mathbf{Var}\, X = \sigma^2,$$

und die Dichte von X ist $\varphi_{\mu,\sigma^2}(a)\, da$ mit

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(a) := \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Eine Zufallsvariable mit Dichte $\varphi_{\mu,\sigma^2}(a)\,da$

heißt normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2, kurz

N(μ, σ^2)-verteilt.

Ist Y N(μ, σ^2)-verteilt,

dann ist $\dfrac{Y-\mu}{\sigma}$ standard-normalverteilt.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Zurück zu unserer locker gestellten Frage:

Wie holt man bei großem n und großem npq eine

Bin(n, p)-verteilte Zufallsvariable X “zurück ins Bild?”

Durch **Standardisieren**, d.h. in diesem Fall

Verschieben um den Erwartungswert μ

und Teilen durch die Standardabweichung σ:

$\frac{X-\mu}{\sigma}$ ist dann annähernd N($0, 1$)-verteilt.

Genaues sagt der Satz von de Moivre-Laplace (Buch S. 44).

Satz (de Moivre (1733) für $p = 1/2$, Laplace (1812))

Sei $Y_1, Y_2, \ldots$ ein p-Münzwurf

und Z eine N(0, 1)-verteilte Zufallsvariable.

Dann gilt mit $n \to \infty$:

$$\mathbf{P}\left(c \leq \frac{1}{\sqrt{npq}}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i - np\right) \leq d\right) \to \mathbf{P}(c \leq Z \leq d)$$

für alle $-\infty \leq c < d \leq \infty$.

Der Wunder nicht genug:

Was dem p-Münzwurf recht ist,

ist jeder Folge von “unabhängigen, identisch verteilten”

Zufallsvariablen mit endlicher Varianz billig.

Diese Aussage wird präzisiert im klassischen

Zentralen Grenzwertsatz (Buch S. 77);

er verallgemeinert den Satz von de Moivre-Laplace.

Intermezzo:

Unabhängigkeit von zwei Zufallsvariablen

Zufallsvariable X_1, X_2 heißen *unabhängig*,

falls für alle Ereignisse $\{X_1 \in A_1\}$, $\{X_2 \in A_2\}$ gilt:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\,\mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

(“Produktformel”)

Beispiele:

Münzwurf, Würfeln.

Im Diskreten

ist die Unabhängigkeit von X_1 und X_2

äquivalent zur Produktform der Verteilungsgewichte:

$$\rho(a_1, a_2) = \rho_1(a_1)\rho_2(a_2), \quad a_1 \in S_1, a_2 \in S_2.$$

Für Zufallsvariable mit Dichten

ist die Unabhängigkeit von X_1 und X_2

äquivalent zur Produktform der gemeinsamen Dichte:

$$f(a_1, a_2)\, da_1\, da_2 = f_1(a_1)\, da_1\, f_2(a_2)\, da_2$$

Beispiele:

1. Uniforme Verteilung auf einem Rechteck:

X_1 uniform verteilt auf $[0, \ell]$, X_2 uniform verteilt auf $[0, b]$,

X_1, X_2 unabhängig.

Dann hat (X_1, X_2) die Dichte

$$\frac{1}{\ell}\mathbf{1}_{[0,\ell]}(a_1)\,da_1\;\frac{1}{b}\mathbf{1}_{[0,b]}(a_2)\,da_2$$

$$= \frac{1}{\ell b}\,\mathbf{1}_{[0,\ell]\times[0,b]}(a_1, a_2)\,da_1\,da_2.$$

(X_1, X_2) ist somit uniform verteilt auf $[0, \ell] \times [0, b]$.

2. Standard-Normalverteilung auf $\mathbb{R}^2$:

Z_1, Z_2 standard-normalverteilt,

Z_1, Z_2 unabhängig.

Dann hat (Z_1, Z_2) die Dichte

$$\varphi(a_1)\, da_1\, \varphi(a_2)\, da_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_1^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_2^2/2}\, da_1\, da_2$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-||a||^2/2}\, da, \quad a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Definition:

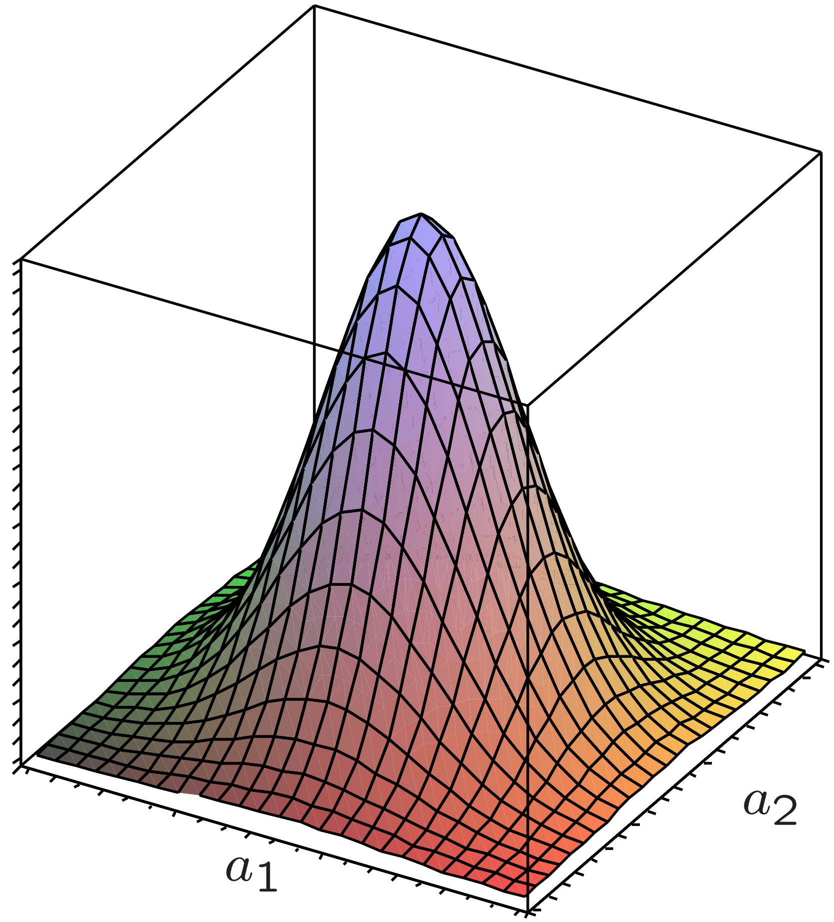
Eine $\mathbb{R}^2$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$f(a)\,da = \frac{1}{2\pi} e^{-||a||^2/2}\,da, \quad a \in \mathbb{R}^2,$$

heißt standard-normalverteilt auf $\mathbb{R}^2$.

$f(a_1, a_2) =$

$$\frac{1}{2\pi} e^{-(a_1^2 + a_2^2)/2}$$



Aus der Drehungsinvarianz von f ist klar:

Für jeden Richtungsvektor u ist die u-Koordinate von Z

so verteilt wie die $(1, 0)$-Koordinate von Z

Diese ist aber nichts anderes als Z_1

und Z_1 ist N(0, 1)-verteilt auf $\mathbb{R}^1$.

Für jeden Richtungsvektor u ist die u-Koordinate von Z N(0, 1)-verteilt auf $\mathbb{R}^1$.

Anders gesagt:

Für jedes Zahlenpaar (u_1, u_2) mit $u_1^2 + u_2^2 = 1$ gilt:

$u_1 Z_1 + u_2 Z_2$ ist N(0, 1)-verteilt,

sofern Z_1, Z_2 unabhängig und N(0, 1)-verteilt sind.

Daraus folgern wir den

Satz:

Z_1, Z_2 seien unabhängig und $\mathrm{N}(0,1)$-verteilt,

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Dann gilt

$c_1 Z_1 + c_2 Z_2$ ist $\mathrm{N}(0, c_1^2 + c_2^2)$-verteilt.

Beweis des Satzes:

O. B. d. A. ist $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$. Wir wissen schon:

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} Z_1 + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} Z_2 \text{ ist } \mathrm{N}(0, 1)\text{-verteilt. Also:}$$

$$c_1 Z_1 + c_2 Z_2 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} Z_1 + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} Z_2 \right)$$

ist $\mathrm{N}(0, c_1^2 + c_2^2)$-verteilt. $\square$

Korollar:

X_1 sei $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$-verteilt, X_2 sei $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$-verteilt;

X_1, X_2 seien unabhängig.

Dann gilt:

$X_1 + X_2$ ist $\mathrm{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$-verteilt.

Beweis des Korollars:

$$Z_1 := \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \text{ und } Z_2 := \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}$$

sind unabhängig und N$(0, 1)$-verteilt.

Nach dem Satz gilt: $\sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2$ ist N$(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$-verteilt.

Daraus folgt:

$$X_1 + X_2 = \mu_1 + \mu_2 + \sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2$$

ist N$(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$-verteilt. $\square$