

# Vorlesung 5a

## Zufallsvariable mit Dichten

### Teil 1

Uniforme Verteilung,  
Exponentialverteilung.

## Kontinuierlich uniform verteilte Zufallsvariable:

Sei  $S$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$  mit endlichem Inhalt  $V(S)$ .

Eine Zufallsvariable  $X$  mit Zielbereich  $S$  heißt

*uniform verteilt auf  $S$ ,*

wenn für alle  $A \subset S$  mit wohldefiniertem Inhalt  $V(A)$  gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{V(S)}.$$

(Man beachte die Analogie zu

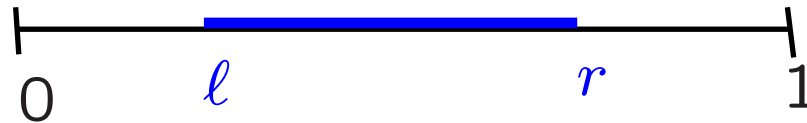
“Anzahl günstige durch Anzahl mögliche Fälle”)

Beispiel 1:

$$S := [0, 1] \subset \mathbb{R}^1$$

$$A := [\ell, r] \quad \text{mit } 0 \leq \ell \leq r \leq 1$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = r - \ell.$$

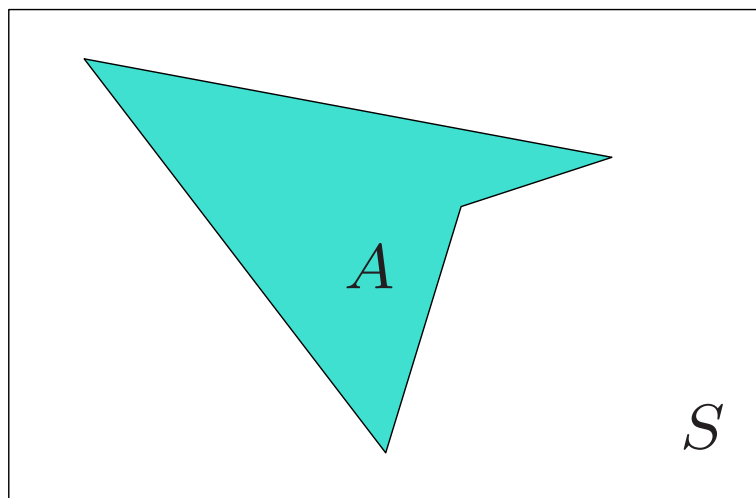


Beispiel 2:

$$S := [0, \ell] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$$

$A \subset S$  mit Flächeninhalt  $V(A)$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{V(A)}{\ell \cdot b}.$$



Für diskret uniform verteilte Zufallsvariable hatten wir

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S}.$$

Das Analogon dazu ist jetzt:

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

Der Ausdruck  $da$  taucht hier in zwei Bedeutungen auf:

links als infinitesimales Raumstück

und rechts als dessen infinitesimaler Inhalt.

$$\mathbf{P}(X \in da) = \frac{da}{V(S)}.$$

Die Gleichung bekommt ihre exakte Bedeutung  
“unter dem Integral”:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \int_A \mathbf{P}(X \in da) = \int_A \frac{da}{V(S)} = \frac{V(A)}{V(S)}$$



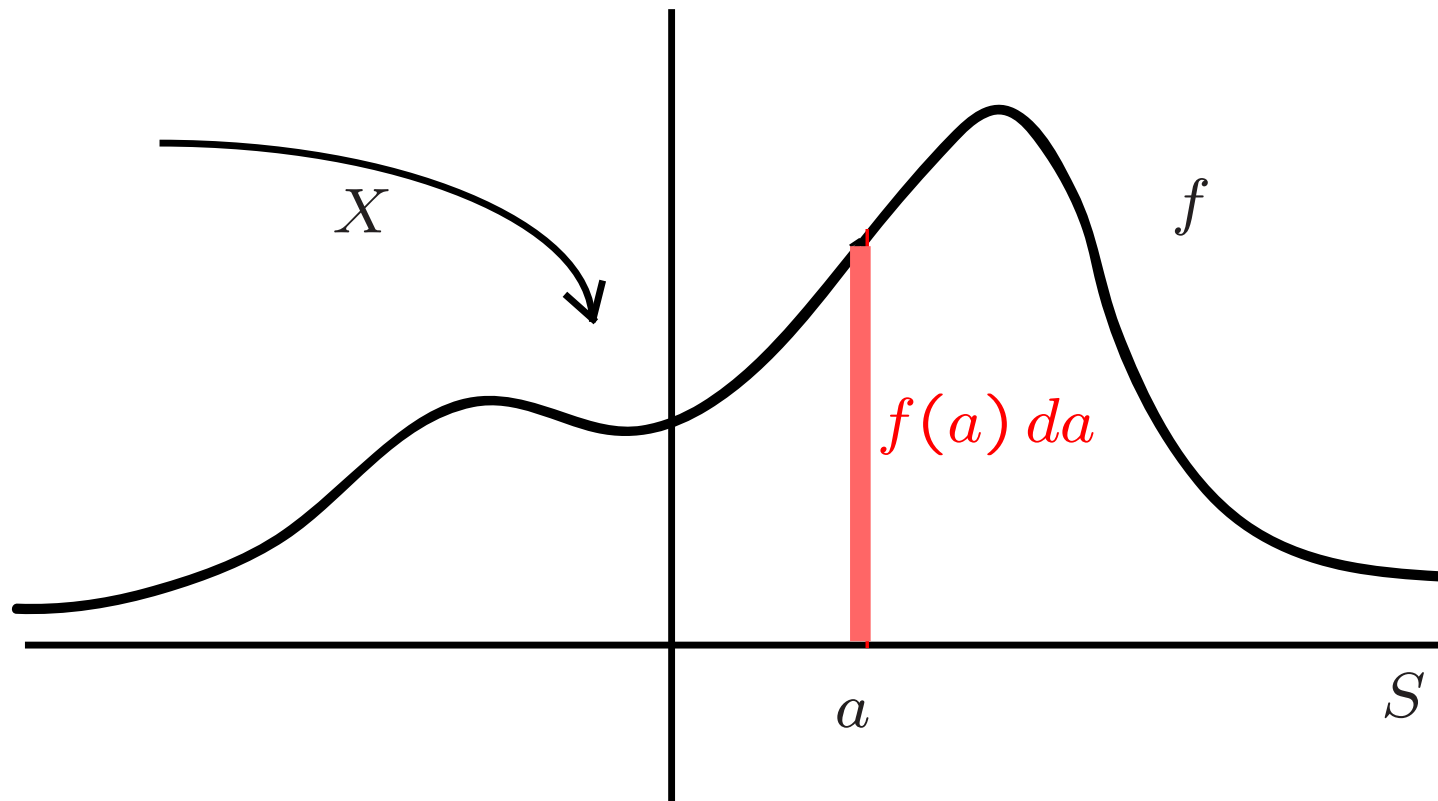
# Dichten

Wie im Diskreten begnügen wir uns nicht nur mit rein zufälliger Wahl.

Das Analogon zu den Verteilungsgewichten  $\rho(a)$  ist jetzt gegeben durch infinitesimale Gewichte  $f(a) da$ ,

wobei  $f : S \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine Funktion ist mit

$$\int_S f(a) da = 1.$$



Der wichtigste Fall:

$S \subset \mathbb{R}$  Intervall mit Endpunkten  $l, r$

(dabei ist  $l = -\infty$  oder  $r = \infty$  erlaubt)

Sei  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  nicht-negativ, integrierbar mit

$$\int_l^r f(a) da = 1 .$$

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Zielbereich  $S$ .  
Gilt für alle Intervalle  $[c, d] \subset S$  die Gleichung

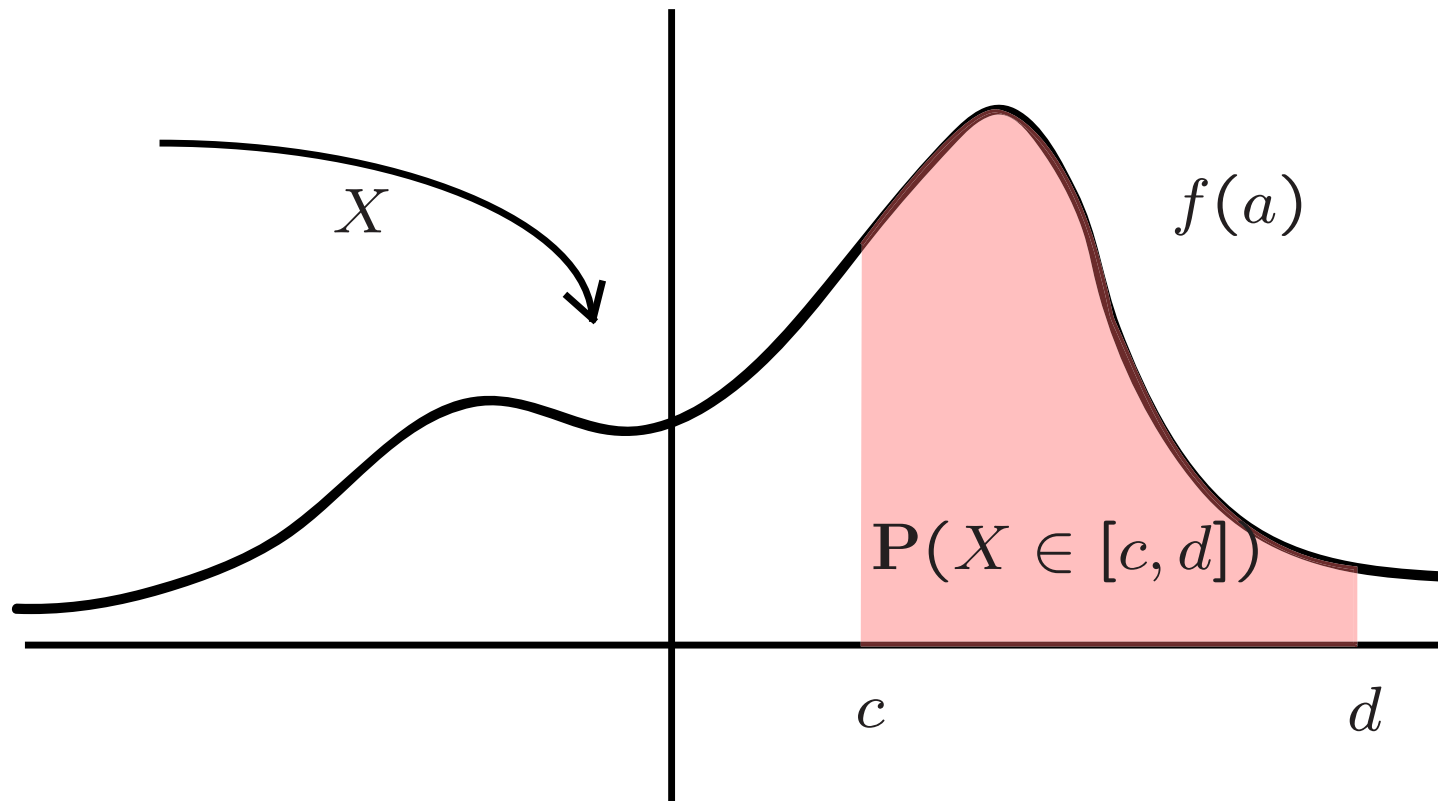
$$\mathbf{P}(X \in [c, d]) = \int_c^d f(a) da ,$$

so sagt man, dass

$X$  die *Dichte*  $f(a) da$  besitzt.

Wir schreiben dann auch kurz

$$\mathbf{P}(X \in da) = f(a) da , \quad a \in S .$$



## Die Funktion

$$F(x) := \mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(a) da, \quad x \in \mathbb{R}$$

(mit  $f(a) = 0$  für  $a \notin S$ )

heißt *Verteilungsfunktion* von  $X$ .

## Beispiele

1. Eine auf dem Intervall  $[0, 2]$   
uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte  $\frac{1}{2} da, \quad 0 \leq a \leq 2.$

Beispiele:

2. Eine in einem endlichen Intervall  $S = [l, r]$   
uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte  $f(a) da$

$$\text{mit } f(a) := \frac{1}{r - l}, \quad a \in S.$$



Beispiele:

3. Sei  $U$  uniform verteilt auf  $[0, 1]$ .

Gefragt ist nach der Dichte von  $X := U^2$ .

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{x})$$

$$= \sqrt{x} \stackrel{!}{=} \int_0^x f(a) da, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiele:

4. Sei  $U$  uniform verteilt auf  $[0, 2]$ .

Gefragt ist nach der Dichte von  $X := U^2$ .

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x} \stackrel{!}{=} \int_0^x f(a) da, \quad 0 \leq x \leq 4.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

## Beispiele:

5. Sei  $U$  uniform verteilt auf  $[0, 1]$ .

Gefragt ist nach der Dichte von  $X := -\ln U$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \leq x) &= \mathbf{P}(-\ln U \leq x) \\ &= \mathbf{P}(U \geq e^{-x}) = 1 - e^{-x} \stackrel{!}{=} \int_0^x f(a) da, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

## Erwartungswert und Varianz

einer reellwertige Zufallsvariable  $X$  mit Dichte  $f(a) da$ :

$$\mu = \mathbf{E}[X] := \int_l^r a f(a) da$$

und

$$\sigma^2 = \mathbf{Var}[X] := \int_l^r (a - \mu)^2 f(a) da ,$$

vorausgesetzt, die Integrale sind wohldefiniert.

Analog zum Diskreten gilt für  $h : S \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbf{E}[h(X)] = \int_l^r h(a) f(a) da$$

vorausgesetzt das Integral existiert.

Definition:

Eine Zufallsvariable  $X$  mit Zielbereich  $\mathbb{R}_+$  heißt

**standard-exponentialverteilt,**

falls sie die Dichte

$$\mathbf{P}(X \in dx) = e^{-x} dx, x \geq 0$$

besitzt.

Für standard-exponentialverteiltes  $X$  gilt:

$$\mathbf{P}(X \geq t) = \int_t^{\infty} e^{-x} dx = e^{-t},$$

$$\mathbf{P}(X \leq t) = 1 - e^{-t}.$$

Erwartungswert und Varianz einer  
standard-exponentialverteilten Zufallsvariablen  $X$ :

Mit partieller Integration

$$\int u v' = uv - \int u'v$$

ergibt sich

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = -xe^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-x} dx = 1$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x \cdot e^{-x} dx = 2$$

Also:  $\mathbf{E}[X] = 1$ ,  $\mathbf{Var}X = 1$ .



Sei  $X$  standard-exponentialverteilt.

Was ist die **Dichte von  $Y := \frac{1}{2}X$**  ?

$$\mathbf{P}(Y > y) = \mathbf{P}(X > 2y) = e^{-2y}$$

Also ist die Verteilungsfunktion von  $Y$

$$F(y) = 1 - e^{-2y}, \quad y \geq 0$$

und die Dichte

$$f(y)dy = 2e^{-2y} dy, \quad y \geq 0.$$

Lemma:

Die reellwertige ZV  $X$  habe Dichte  $f(x) dx$ .

Für  $\lambda > 0$  hat dann  $Y := \frac{1}{\lambda}X$  die Dichte  $f(\lambda y) \lambda dy$ .

Beweis:

$$\mathbf{P}(c \leq Y \leq d) = \mathbf{P}(\lambda c \leq X \leq \lambda d)$$

$$= \int_{\lambda c}^{\lambda d} f(x) dx = \int_c^d f(\lambda y) \lambda dy$$

(mit der Substitution  $x = \lambda y$ ).  $\square$

Das sieht man auch heuristisch:

$X$  hat Dichte  $f(x) dx$ , Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y \in dy) &= \mathbf{P}(X \in d(\lambda y)) \\ &= f(\lambda y) d(\lambda y) \\ &= f(\lambda y) \lambda dy.\end{aligned}$$

Definition:

Sei  $\lambda > 0$ .

Eine  $\mathbb{R}_+$ -wertige Zufallsvariable  $Y$  mit Dichte  $e^{-\lambda y} \lambda dy$   
heißt **exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda$** .

$X := \lambda Y$  ist dann standard-exponentialverteilt.

Also gilt :

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbf{Var} Y = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Wir erinnern an die “Exponentialapproximation”:  
(Vorlesung 3b und Buch Seite 42):

Ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Zufallsvariable  $X_n$  geometrisch verteilt  
mit  $\mathbf{E}[X_n] \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ , dann gilt:

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\right) \rightarrow e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\right) \rightarrow e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Ist  $X$  eine standard-exponentialverteilte Zufallsvariable,  
dann kann man dies schreiben als

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} \geq t\right) \rightarrow \mathbf{P}(X \geq t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Man sagt dafür auch:

Die Folge der Zufallsvariablen  $X_n/\mathbf{E}[X_n]$

**konvergiert in Verteilung**

gegen die Zufallsvariable  $X$ .

Salopp gesprochen:

Man holt für kleines  $p$   
eine Geom( $p$ )-verteilte Zufallsvariable  $Y$  zurück ins Bild,  
indem man  $pY$  betrachtet.

Eine Illustration der  
Exponentialapproximation der geometrischen Gewichte  
und damit auch des Begriffs der Dichte  
gibt ein R-Programm von Frau Wandtner (siehe Homepage)