Vorlesung 1b

Wiederholte rein zufällige Wahl (aus endlich vielen möglichen Ausgängen)

mit dem Beispiel

"Wahrscheinlichkeit von Kollisionen"

$n = 25$ Individuen,

$r = 365$ Plätze.

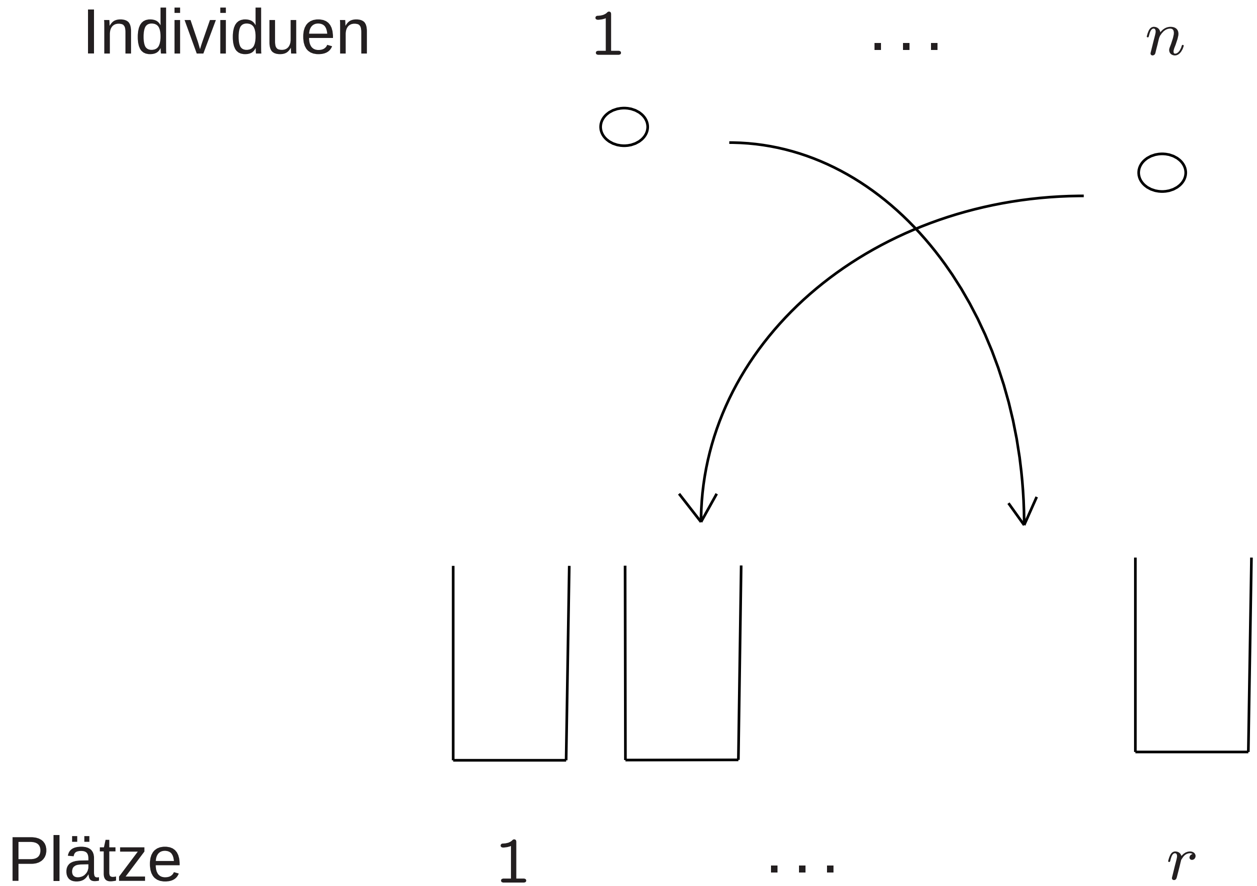
Jedes Individuum wird auf einen

rein zufällig ausgewählten Platz gesetzt.

(Mehrfachbelegungen sind erlaubt!)

Wie wahrscheinlich ist es, dass dabei

keine Mehrfachbelegung auftritt?


Individuen
1
. . .
n
Plätze
1
. . .
r

Ein anderer Blick:

Jedes von n Individuen

ist mit je einem von r möglichen Kennzeichen versehen,

das vom Zufall bestimmt ist.

Wie stehen die Chancen,

dass keine der zwei Individuen gleich gekennzeichnet sind?

(Zitat aus “dem Buch”, Seite 1)

In der Informatik denkt man bei den Individuen an Daten

und spricht bei den Kennzeichen

von Hash-Werten oder Fingerabdrücken.

Populäre Version:

$n = 25$ Leute auf einer Party

Kennzeichen ... Geburtstag ($\in \{1, 2, \ldots, 365\}$)

Wie wahrscheinlich ist es,

dass keine zwei Leute am selben Tag Geburtstag haben?

Die Individuen denken wir uns mit 1 bis n

und die Kennzeichen mit 1 bis r nummeriert.

Ein Ausgang der Kennzeichnung lässt sich beschreiben

durch das n-tupel

$$a = (a_1, \ldots, a_n) \ ,$$

wobei a_i das Kennzeichen des i-ten Individuums bezeichnet

$(1 \leq a_i \leq r)$.

Die Menge der möglichen Ausgänge der Kennzeichnung ist

$S := \{1, \ldots, r\}^n$, die Menge aller n-tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in \{1, \ldots, r\}$.

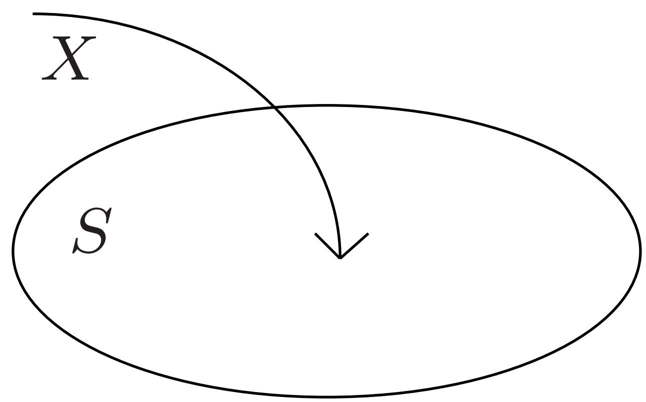
Manchmal schreiben wir dafür auch

$$S := \{1, \ldots, r\}^{\{1,\ldots,n\}},$$

die Menge aller Abbildungen von $\{1, \ldots, n\}$ nach $\{1, \ldots, r\}$.

Den zufälligen Ausgang der Kennzeichnung

beschreiben wir durch eine *Zufallsvariable* X.



X kommt durch zufällige Wahl

eines Elementes aus S zustande.

Die Menge S heißt *Zielbereich* der Zufallsvariable X.

Wie jedes Element $(a_1, \ldots, a_n)$ unserer Menge S

besteht auch die Zufallsvariable X aus n Komponenten:

$$X = (X_1, \ldots, X_n) \ .$$

Wir interessieren uns für das *Ereignis*,

dass keine zwei Komponenten von X gleich sind.

Dieses Ereignis schreiben wir als

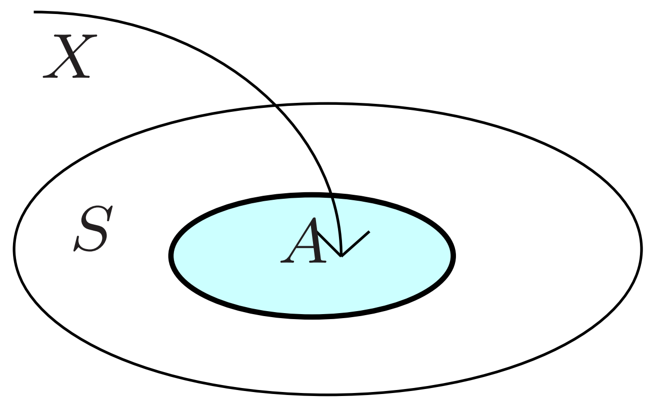
$$\{X_i \neq X_j \text{ für alle } i \neq j\}$$

oder auch als

$$\{X \in A\}$$

mit der Teilmenge

$$A := \{a \in S \,:\, a_i \neq a_j \text{ für alle } i \neq j\} \,.$$



Wie kommt man zur **Wahrscheinlichkeit**

des Ereignisses $\{X \in A\}$?

Zur Erinnerung:

Wahrscheinlichkeiten gehören zu Ereignissen

und messen deren Chance einzutreten

mit einer Zahl zwischen 0 und 1:

$$\mathbf{P}(X \in A)$$

Zwei einleuchtende Regeln

für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbf{P}(X \in S) = 1\ .$$

d.h. das *sichere Ereignis* $\{X \in S\}$ hat Wahrscheinlichkeit 1

und (bei endlich vielen möglichen Ausgängen, d.h. $\#S < \infty$)

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a)$$

(Additivität.)

Um die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(X \in A)$ berechnen zu können,

muss man eine Modellannahme treffen.

Unsere Modellannahme:

rein zufällige Wahl.

Damit ist gemeint, dass für je zwei $a, a' \in S$

$$\mathbf{P}(X = a) = \mathbf{P}(X = a').$$

Das heißt: kein Ausgang ist bevorzugt.

Also:

$$P(X = a) = \frac{1}{\#S}, \quad a \in S.$$

Und

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{\#A}{\#S}.$$

Wir haben nun die Aufgabe des Abzählens der Mengen

$$S := \{1, \ldots, r\}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : 1 \leq a_i \leq r\}$$

und

$$A := \{a \in S \; : \; a_i \neq a_j \text{ für alle } i \neq j\}$$

$$\#S = r^n$$

$$S = \{(a_1, \ldots, a_n) : 1 \leq a_i \leq r\}$$

$$A := \{a \in S \ : \ a_i \neq a_j \text{ für alle } i \neq j\}$$

$$\#A = ?$$

Für a_1 gibt es r mögliche Werte, für a_2 dann noch $r - 1$, usw.

Also:

$$\#A = r(r-1) \cdots (r-(n-1))$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{r(r-1)\cdots(r-(n-1))}{r^n}$$

$$= \frac{r-1}{r}\,\frac{r-2}{r}\cdots\frac{r-(n-1)}{r}$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{r}\right).$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{r!}{r^n (r-n)!}$$

mit $k! := 1 \cdot 2 \cdots k$, lies: k-Fakultät

Eine Formel aus der Mathe 1 (“AnaLinA”):

$$e^{-h} = 1 - h + o(h) \quad \text{für } h \to 0.$$

Damit bekommen wir die “AnaLinA - Approximation:”

$$\prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{r}\right) \approx \prod_{i=1}^{n-1} \exp\left(-\frac{i}{r}\right)$$

$$= \exp\left(-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{r}\right) = \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2r}\right).$$

$$\mathbf{P}(X \in A) \approx \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2r}\right).$$

Die Stirling-Formel:

$$k! \approx \sqrt{2\pi\, k}\, \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

Abraham de Moivre (1667-1754)

$$k! \approx \sqrt{2\pi\, k}\, \left(\frac{k}{e}\right)^{k}$$

$$\frac{r!}{r^n (r-n)!} \approx \sqrt{\frac{r}{r-n}}\, \left(\frac{r}{r-n}\right)^{r-n} e^{-n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{r}}} \left(1 - \frac{n}{r}\right)^{n-r} e^{-n}$$

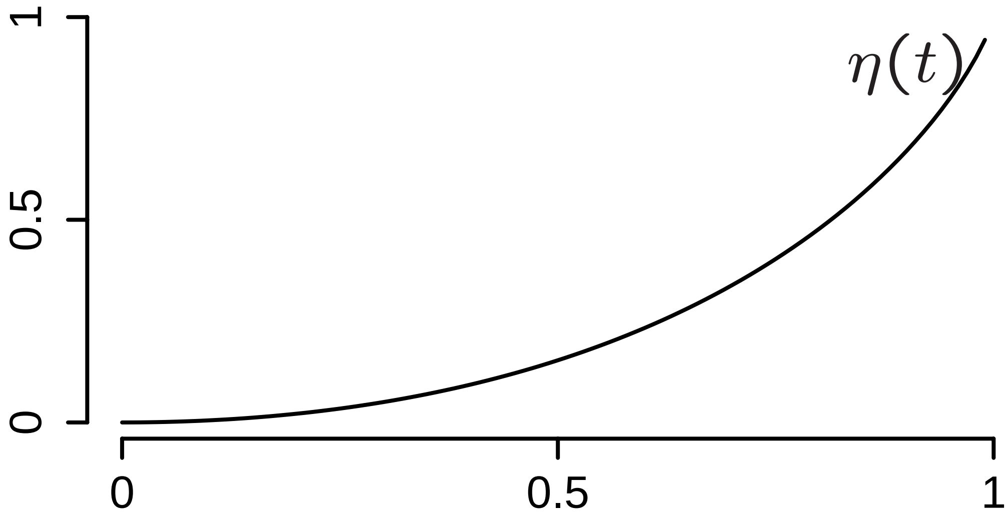
$$\Big(1-\frac{n}{r}\Big)^{n-r}e^{-n} = \exp\Big(-n + (n-r)\ln\Big(1-\frac{n}{r}\Big)\Big)$$

$$= \exp\Big(-r\,\Big(\frac{n}{r} + \Big(1-\frac{n}{r}\Big)\ln\Big(1-\frac{n}{r}\Big)\Big)\Big)$$

$$= \exp\Big(-r\,\eta\Big(\frac{n}{r}\Big)\Big)$$

mit $\quad \eta(t) := t + (1-t)\ln(1-t), \qquad 0 \le t \le 1.$

$$\eta(t) := t + (1-t)\ln(1-t), \qquad 0 \le t \le 1.$$

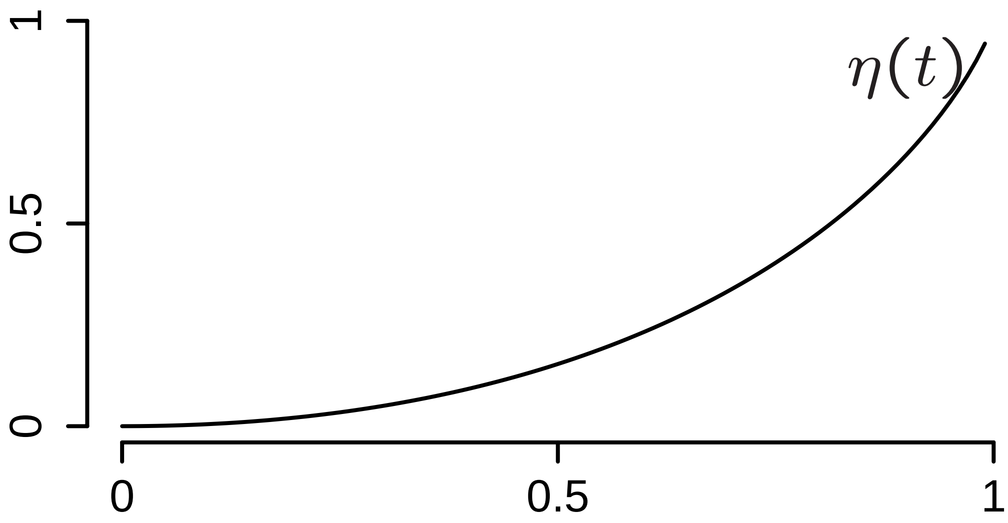


$$\mathbf{P}(X \in A) \approx \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{r}}} \exp\left(-r\,\eta\left(\frac{n}{r}\right)\right)$$

Für $n \ll r$, also $t := \frac{n}{r} \ll 1$,

können wir $\eta(t)$ quadratisch approximieren:

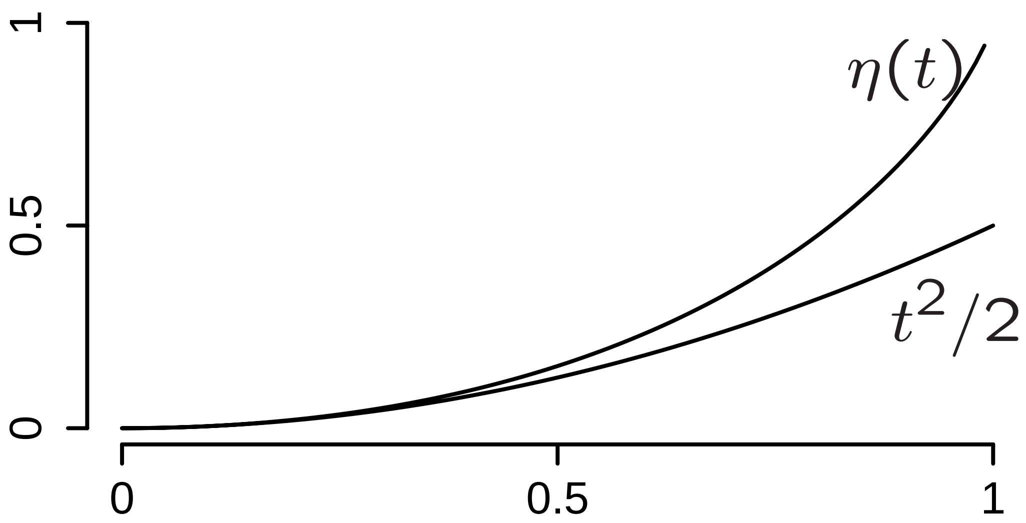
$$\eta(t) := t + (1-t)\ln(1-t), \qquad 0 \le t \le 1.$$



$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \eta''(0) = 1$$

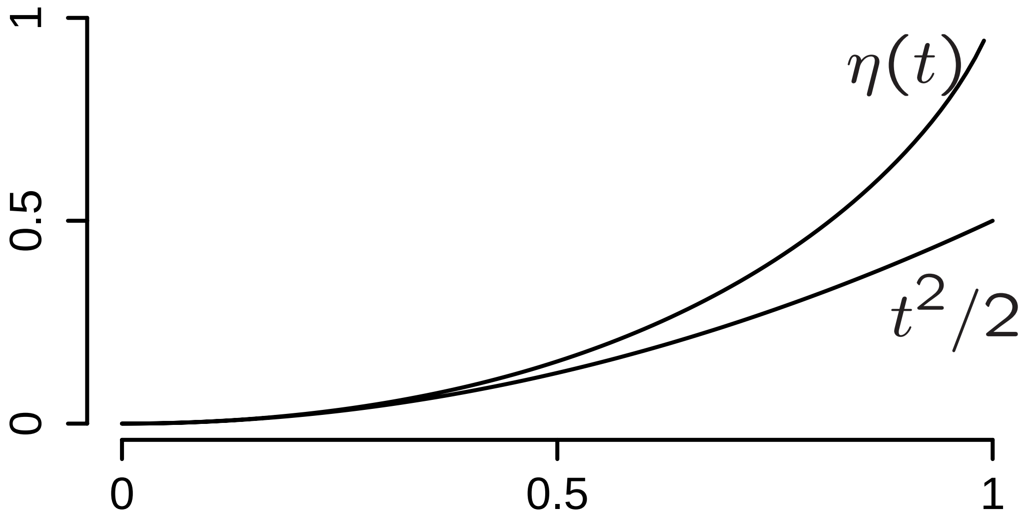
$$\eta(t) = t + (1-t)\ln(1-t), \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\eta(0) = 0, \quad \eta'(0) = 0, \quad \eta''(0) = 1$$



$t^2/2$ ist die quadratische Approximation von $\eta(t)$ um $t = 0$.

(Taylor-Entwicklung der Ordnung 2.)



$t^2/2$ ist die quadratische Approximation von $\eta(t)$ um $t = 0$.

Für $n \ll r$ (wie z. B. für $n = 25$, $r = 365$) ist also

$$\eta\left(\frac{n}{r}\right) \approx \left(\frac{n}{r}\right)^2 / 2.$$

Fazit:

Für $n < r$ ist $\quad \mathbf{P}(X \in A) \approx \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{r}}} \exp\left(-r\,\eta\left(\dfrac{n}{r}\right)\right)$

mit $\eta(t) = t + (1-t)\ln(1-t), \qquad 0 \le t \le 1$

(Stirling-Approximation).

Für $n \ll r$ ist $\quad \mathbf{P}(X \in A) \approx \exp\left(-\dfrac{n^2}{2r}\right)$

(Stirling+Taylor-Approximation)

Für $n^2 \ll r$ ist $\quad \mathbf{P}(X \in A) \approx 1.$

Man beachte:

Die Stirling+Taylor Approximation

$$\mathbf{P}(X \in A) \approx \exp\Big(-\frac{n^2}{2r}\Big)$$

ist fast identisch mit der “AnaLinA-Approximation”

$$\mathbf{P}(X \in A) \approx \exp\Big(-\frac{n(n-1)}{2r}\Big)$$

Beispiel: $n = 25, r = 365$:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{r^n} = 0.431300$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{r}}}\exp\left(-r\,\eta\left(\frac{n}{r}\right)\right) = 0.431308$$

$$\exp\left(-\frac{n^2}{2r}\right) = 0.425$$

Von der Statik zur Dynamik:

Der Zeitpunkt der ersten Kollision.

Wir denken uns r fest und lassen n laufen $(n = 1, 2, ..)$

Vorstellung: Ein Individuum nach dem anderen wird auf einen (immer wieder neu) rein zufällig gewählten Platz gesetzt.

Die Folge $(X_1, X_2, \ldots)$ der gewählten Plätze ist dann eine rein zufällige $1 \ldots r$-Folge

$A_n :=$ „ keine Kollision bis (einschließlich) n "

T:= Zeitpunkt der ersten Kollision

(ist ablesbar aus $(X_1, X_2, \ldots)$. Es gilt

$$A_n = \{T > n\}$$

also insbesondere auch

$$\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(T > n).$$

Wir haben somit AUCH die Verteilung der Zufallsvariablen T

(exakt und näherungsweise) berechnet.

Die Ferebee-Wandtner'schen Programme zur VL 1b (siehe Homepage)

geben dazu erhellende Illustrationen.