Vorlesung 10a

Schätzen mit Verlass

Schätzen von Anteilen

Große Population (♀ und ♂)

mit unbekanntem Weibchenanteil p

In einer Stichprobe vom Umfang $n = 53$

gab es 23 Weibchen.

Wie zuverlässig ist der Schätzwert $\frac{23}{53}$?

Eine sanfte Einführung in die Statistik von Anteilen findet man auf
http://ismi.math.uni-frankfurt.de/schneider/StatBiol/V5_Web.pdf

Goldene Idee der Statistik:

In einem idealisiert gedachten Szenario
interpretiert man den Schätzwert
als Realisierung einer Zufallsvariable
und rechnet mit deren Variabilität.

Deutung der Stichprobenziehung als p-Münzwurf

$$\widehat{p} = \frac{B}{n}, \quad \text{mit} \quad B := \text{Anzahl der “Erfolge”}$$

$$\boxed{\sigma_{\widehat{p}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)}}$$

(B ist Bin(n, p)-verteilt.)

Ein hübsche Illustration dieser Formel

(und ein Weg, wie man sie experimentell entdecken kann)

findet sich auf

http://math.uni-frankfurt.de/ ferebee/explorativ/Woche5.html

Der Zentrale Grenzwertsatz besagt:

$\widehat{p}$ ist approximativ normalverteilt

mit Erwartungswert p und Standardabweichung $\sigma_{\widehat{p}}$.

Also insbesondere:

$$\mathbf{P}_p(|p - \widehat{p}| \leq 2\sigma_{\widehat{p}}) \approx 0.95$$

$$\mathbf{P}_p(p \in [\widehat{p} - 2\sigma_{\widehat{p}},\, \widehat{p} + 2\sigma_{\widehat{p}}]) \approx 0.95$$

In der Praxis ist auch $\sigma_{\widehat{p}}$

(aus der *einen* vorliegenden Stichprobe) zu schätzen.

$$\sigma_{\widehat{p}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)}$$

wird geschätzt durch

$$g := \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})}$$

$$\mathbf{P}_p(p \in [\widehat{p} - 2\sigma_{\widehat{p}},\, \widehat{p} + 2\sigma_{\widehat{p}}]) \approx 0.95$$

überträgt sich auf

$$\mathbf{P}_p(p \in [\widehat{p} - 2g,\, \widehat{p} + 2g]) \approx 0.95$$

Das zufällige Intervall

$$I := [\widehat{p} - \tfrac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})},\ \widehat{p} + \tfrac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})}]$$

ist ein

Konfidenzintervall für p

mit approximativer Überdeckungswahrscheinlichkeit 0.95

oder kurz ein

approximatives 95%-Konfidenzintervall für p.

Faustregel für die Anwendbarkeit: $n\widehat{p} \geq 9$ und $n(1-\widehat{p}) \geq 9$.

R-Programme und Illustrationen zur exakten Überdeckungswahrscheinlichkeit von I findet man auf http://math.uni-frankfurt.de/ ferebee/explorativ/Woche6.html

Schätzung des Erwartungswertes

einer Verteilung auf $\mathbb{R}$ (Lageschätzung)

$$m := \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

wird gedacht als eine Realisierung der Zufallsvariablen

$$\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

mit $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, identisch verteilt

mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ.

Anders als bei der Anteilschätzung ist hier σ i.a. keine Funktion von μ.

Der Zentrale Grenzwertsatz besagt:

$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ist approximativ $\mathrm{N}(0,1)$-verteilt.

Bei bekanntem σ ist also

$$\left[\bar{X} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

ein approximatives 95%-Konfidenzintervall für μ.

In der Praxis hat man auch σ aus den Daten zu schätzen.

Wir wissen schon:

$$s^2 := \frac{1}{n-1}\left((X_1 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2\right)$$

ist ein "erwartungstreuer" Schätzer für σ^2

Satz (W. Gosset (alias “Student”, 1908), R. Fisher (1924))

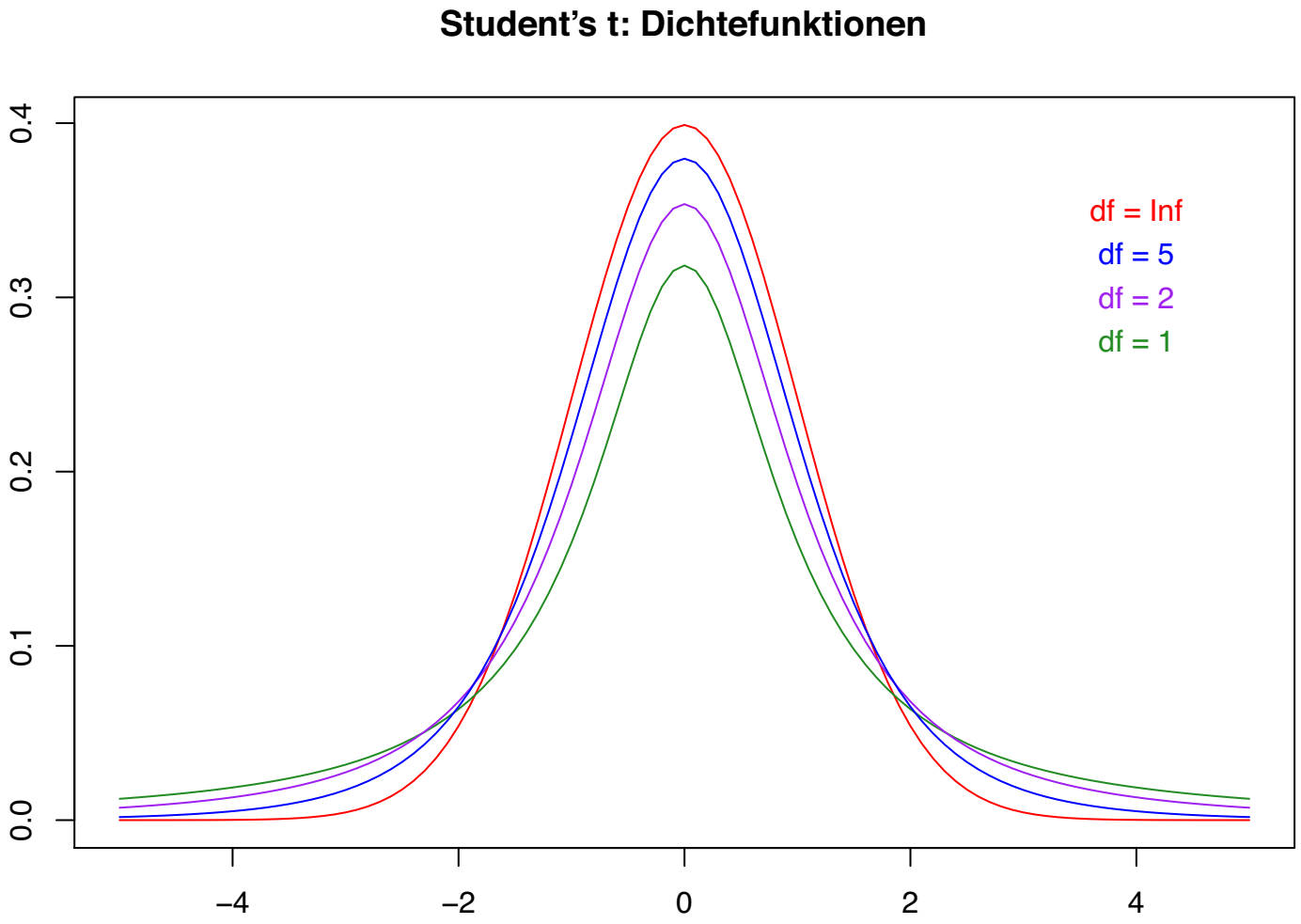
Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und N(μ, σ^2)-verteilt,

dann ist $\quad T := \dfrac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \quad$ so verteilt wie

$$T_{n-1} := \frac{N_0}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(N_1^2 + \cdots + N_{n-1}^2\right)}}$$

mit unabhängigen und N$(0, 1)$ verteilten $N_0, \ldots, N_{n-1}$.

Bezeichnung: Die Verteilung von T_{n-1} heißt t-Verteilung (oder Student-Verteilung) mit $n - 1$ Freiheitsgraden.


Student's t: Dichtefunktionen
df = Inf
df = 5
df = 2
df = 1
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
0
2
4

$$T_{n-1} := \frac{N_0}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(N_1^2 + \cdots + N_{n-1}^2\right)}}$$

Für $n \to \infty$ ist T_{n-1} asymptotisch $\mathrm{N}(0,1)$-verteilt (Gesetz der großen Zahlen im Nenner von T_{n-1}).

Je kleiner n, um so mehr schwankt der Nenner, und um so *breitschultriger* ist die Verteilung von T_{n-1}

Z.B. für $n = 6$: $\quad \mathbf{P}(|T_5| \leq 2.57) = 0.95.$

Satz (W. Gosset (alias “Student”, 1908), R. Fisher (1924))

Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und N(μ, σ^2)-verteilt,

dann ist $\quad T := \dfrac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \quad$ so verteilt wie

$$T_{n-1} := \frac{N_0}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\left(N_1^2 + \cdots + N_{n-1}^2\right)}}$$

mit unabhängigen und N$(0, 1)$ verteilten $N_0, \ldots, N_{n-1}$.

Folgerung: Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und N(μ, σ^2)-verteilt, dann ist für jedes $c > 0$:

$$\mathbf{P}(|T_{n-1}| \leq c) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right| \leq c\right) = \mathbf{P}\left(\mu \in \left[\bar{X} - \frac{cs}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{cs}{\sqrt{n}}\right]\right)$$

Für ein 95%-Konfidenzintervall bestimme c so, dass sich hier 0.95 ergibt.

Z.B. für $n = 6$: $\mathbf{P}(|T_5| \leq 2.57) = 0.95$.

Der passende R-Befehl ist `qt(0.975, 5)`,

mit der Ausgabe 2.57

Denn: $\mathbf{P}(T_5 \leq 2.57) = 0.975$.

Man sagt: Das 0.975-Quantil der $t(5)$-Verteilung ist 2.57.

Beweis des Satzes von Gosset und Fisher: $X_1, \ldots, X_n$ ist von der Form

$X_1 = \mu + \sigma Z_1, , \ldots, X_n = \mu + \sigma Z_n$

mit $Z_1, \ldots, Z_n$ unabhängig und standard-normalverteilt. Also:

$\bar{X} - \mu = \sigma \bar{Z}$

$s = \sigma \sqrt{\frac{1}{n-1}(Z_1 - \bar{Z})^2 + \cdots + (Z_n - \bar{Z})^2}$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\bar{Z}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\left((Z_1 - \bar{Z})^2 + \cdots + (Z_n - \bar{Z})^2\right)}}$$

$\sqrt{n}\bar{Z}$ ist die Koordinate von $\vec{Z} := (Z_1, \ldots, Z_n)$ bzgl. des Einheitsvektors in Richtung $(1, \ldots, 1)$,

$(Z_1 - \bar{Z})^2 + \cdots + (Z_n - \bar{Z})^2$ ist das Längenquadrat der Projektion orthogonal dazu.

Die Behauptung des Satzes folgt dann aus der Rotationssymmetrie der Verteilung von $\vec{Z}$ wie in Aufgabe 36 (siehe auch Seite 138 im Buch).

Ein Konfidenzintervall für den Median

Eine Zahl ν heißt *Median* der Verteilung ρ auf $\mathbb{R}$,
wenn $\rho((-\infty, \nu]) \geq 1/2$ und $\rho([\nu, \infty)) \geq 1/2$ gilt.

Die *Ordnungsstatistiken* $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$
sind die aufsteigend geordneten $X_1, \ldots, X_n$

Ein Kandidat für ein Konfidenzintervall für den Median ist

$$[X_{(1+j)}, X_{(n-j)}]$$

mit $0 \leq j < n/2$.

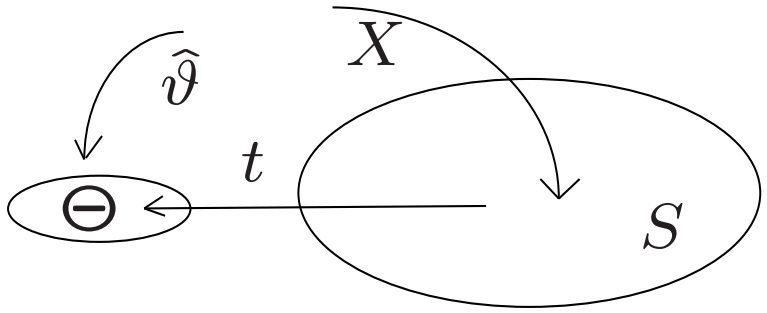
$$\mathbf{P}_\rho\big(\nu \notin [X_{(1)}, X_{(n)}]\big) = \mathbf{P}_\rho(X_{(1)} > \nu) + \mathbf{P}_\rho(X_{(n)} < \nu)\ .$$

$$\mathbf{P}_\rho(X_{(1)} > \nu) \le 2^{-n}$$

$\mathbf{P}_\rho(X_{(n)} < \nu) \le 2^{-n}$. Also:

$$\mathbf{P}_\rho\big(\nu \in [X_{(1)}, X_{(n)}]\big) \ge 1 - \tfrac{1}{2^{n-1}}\ .$$

Ein Logo der Statistik:



$$\mathbf{P}_\vartheta(X \in da) = \rho_\vartheta(da)\,, \quad \vartheta \in \Theta$$

Θ . . . *Parameterraum*

S . . . *Beobachtungsraum*

$\widehat{\vartheta} := t(X)$ . . . *Schätzer* für den Parameter ϑ

Sei $m(\vartheta)$ ein reelles Parametermerkmal

und $I = I(X)$ ein aus den Daten konstruiertes Intervall.

Gilt für ein $\alpha \in (0, 1)$

$$\mathbf{P}_\vartheta(m(\vartheta) \in I) \geq 1 - \alpha \quad \text{für jedes } \vartheta \in \Theta$$

dann sagt man:

I ist ein *Konfidenzintervall* für $m(\vartheta)$ mit *Niveau* $1 - \alpha$,

es hält die *Überdeckungswahrscheinlichkeit* $1 - \alpha$ ein.