Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Donnerstag, 12. Januar 2011, zu Beginn der Vorlesung

33. Z_1, Z_2, Z_3 seien unabhängig und standard-naormalverteilt, $\vec{Z}$ sei der zufällige Vektor in $\mathbb{R}^3$ mit Standardkoordinaten Z_1, Z_2, Z_3. Es sei $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ eine Ortnonormalbasis in $\mathbb{R}^3$.
a) Warum sind die $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$-Koordinaten von $\vec{Z}$ unabhängig und standard-normalverteilt? (Hier reicht eine anschauliche Begründung (ohne formalen Beweis) aus.)
b) Warum sind $\bar{Z} := \frac{1}{3}(Z_1 + Z_2 + Z_3)$ und $Y := (Z_1 - \bar{Z})^2 + (Z_2 - \bar{Z})^2 + (Z_3 - \bar{Z})^2$ unabhängig? Warum ist Y so verteilt wie die Summe der Quadrate von zwei unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallsvariablen?

34. S. In Einkommensklasse A hat das Einkommen (eines rein zufällig herausgegriffenen Individuums) den Mittelwert 70 und die Standardabweichung 15; in Einkommensklasse B ist der Mittelwert 30 und die Standardabweichung 10. Die Klasse B hat doppelt so viele Individuen wie die Klasse A. Berechnen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung über beide Klassen.

35. Ein Lügendetektor überführe Lügner in 90% aller Fälle, denunziere aber in 10% auch Nichtlügner. Aus Erfahrung weiß man, das 10% aller Testpersonen lügen. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, (i) dass eine Person wirklich lügt und (ii) dass eine Person die Wahrheit sagt, falls dies vom Detektor angezeigt wird?

36. S. (i) U_0, U_1, U_2, U_3 seien unabhängig und uniform verteilt. Bestimmen Sie $\mathbf{P}(U_3 > U_0, U_1 > U_0, U_2 < U_0)$.

(ii) Zur Erinnerung: Der Münzwurf $\{Z_1, Z_2, Z_3, \ldots)$ mit uniform verteilte Erfolgswahrscheinlichkeit entsteht durch folgendes zweistufige Experiment: In der ersten Stufe wird eine uniform auf $[0, 1]$ verteilte Zufallsvariable U_0 gewählt, und in der zweiten Stufe wird, gegeben $\{U_0 = u\}$, ein u-Münzwurf durchgeführt.

Berechnen Sie $\mathbf{P}(Z_2 = 1|Z_1 = 1)$ und $\mathbf{P}(Z_3 = 1|Z_1 = 1, Z_2 = 0)$.
Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung $Z_1 = I_{\{U_1 < U_0\}}, Z_2 = I_{\{U_2 < U_0\}}, \ldots$.