Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik"

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Donnerstag, 22. Dezember 2011, zu Beginn der Vorlesung

29. *(Zur Erinnerung an die AnaLina).* D sei der vom Vektor $(1,1,1)^T$ aufgespannte (eindimensionale) Teilraum des $\mathbb{R}^3$ (die *Hauptdiagonale* des $\mathbb{R}^3$). Wir betrachten eine Orthonormalbasis $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ mit $\vec{v}_1 := \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$. (Für die beiden Vektoren $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ bleiben dann gewisse Freiheiten, auf die es hier nicht weiter ankommt.) Es sei $D^\perp$ der zu D orthogonale Teilraum; $D^\perp$ wird also von $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ aufgespannt.
Für $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ sei $\bar{a} := \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$. Mit $\vec{a}_D$ und $\vec{a}_{D^\perp}$ bezeichnen wir die Orthogonalprojektionen des Vektors $\vec{a}$ auf D und auf $D^\perp$. Zeigen Sie:
(i) $\vec{a}_D = \bar{a}(1,1,1)^T$ (ii) $|\vec{a}_{D^\perp}|^2 = (a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + (a_3 - \bar{a})^2$.

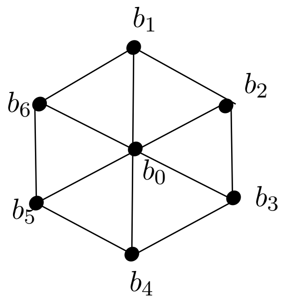
30. X_1 sei Exp(2)-verteilt, X_2 sei Exp(3)-verteilt, und X_1 und X_2 seien unabhängig. Wir betrachten die beiden Zufallsvariablen $R := \min(X_1, X_2)$ und $S := \max(X_1, X_2)$.
a) Berechnen Sie $\mathbf{P}(R > t)$, $t \geq 0$.
b) Berechnen Sie $\mathbf{P}(S > t)$, $t \geq 0$.
Hinweis: $\{\max(X_1, X_2) > t\} = \{X_1 > t\} \cup \{X_2 > t\}$. *Verwenden Sie die Einschluss-Ausschlussregel.*
c) Berechnen und skizzieren Sie die Dichte von R und die von S.

31. S (X_1, X_2) sei ein zufälliges Paar mit Werten in $\{a,b\} \times \{1,2,3\}$ mit Verteilungsgewichten wie in der Tabelle angegeben.

	1	2	3
a	0	0.4	0.2
b	0.1	0.2	0.1

(i) Finden Sie Übergangswahrscheinlichkeiten $P(c, .)$, $c \in \{a,b\}$, so, dass (X_1, X_2) als zweistufiges Zufallsexperiment entsteht.
(ii) Veranschaulichen Sie dieses zweistufige Zufallsexperiment durch einen Baum der Tiefe 2.
(iii) Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert und die bedingte Varianz von X_2 gegeben $\{X_1 = b\}$.

32. S Die Menge $S := \{b_0, \ldots, b_6\}$ trägt die in der Skizze angebene Nachbarschaftsstruktur. Für jedes $a \in S$ sei $P(a, .)$ die uniforme Gewichtung auf den Nachbarn von a (mit $P(a,b) := 0$ falls b kein Nachbar von a ist).



a) (i) Finden Sie eine Verteilung π auf S so, dass die Gewichte $\pi(a)$, $a \in S$, proportional zu den von a ausgehenden Kanten sind.
(ii) Zeigen Sie für das in (i) gefundene π:

$$\pi(a)P(a,b) = \pi(b)P(b,a), \quad a, b \in S.$$

(iii) Überprüfen Sie die folgende Gleichheit (am besten durch direkte Folgerung aus (ii)):

$$\pi(b) = \sum_{a \in S} \pi(a)P(a,b), \quad b \in S$$

b) (X_1, X_2) sei ein zufälliges Paar mit Wertebereich $S \times S$ und Übergangswahrscheinlichkeiten $P(a, .), a \in S$. Die Verteilung π sei die aus Teil a).
(i) Zeigen Sie: Hat X_1 die Verteilung π, dann hat auch X_2 die Verteilung π.
(ii) Es sei X_1 uniform verteilt auf S. Berechnen Sie $\mathbf{P}(X_2 = b_0)$.