Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Donnerstag, 8. Dezember 2011, zu Beginn der Vorlesung

21. S a) Stimmt die folgende Aussage: Zwei Indikatorvariable X und Y sind genau dann unkorreliert, wenn sie unabhängig sind?

b) X_1 und X_2 seien die Standardkoordinaten eines uniform auf dem Einheitskreis $K := \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \; : a_1^2 + a_2^2 \leq 1\}$ verteilten zufälligen Punktes. Sind X_1 und X_2
i) unkorreliert? ii) unabhängig?

c) Zwei Ereignisse E_1, E_2 nennen wir *positiv (negativ) korreliert*, wenn $\mathbf{P}(E_1 \cap E_2)$ größer (kleiner) ist als $\mathbf{P}(E_1) \cdot \mathbf{P}(E_2)$. Es sei (X_1, X_2) ein rein zufällig (ohne Zurücklegen) aus $\{1, 2, \ldots, 20\}$ gezogenes Paar. Sind die beiden Ereignisse $E_1 := \{X_1 \geq 8\}$ und $E_2 := \{X_2 \geq 12\}$
(i) positiv korreliert? (ii) negativ korreliert? (iii) unabhängig?

22. Ein bestimmter Flugzeugtyp hat 500 Sitzplätze. Wieviele Platzbuchungen darf die Fluggesellschaft annehmen, wenn erfahrungsgemäß eine Buchung mit Wahrscheinlichkeit 0.1 storniert wird und die Fluggesellschaft eine Wahrscheinlichkeit von 2.5% für eine Überbuchung in Kauf nimmt? (Die angegebenen Zahlen sind frei erfunden.)
Hinweise: i) Es gilt bekanntermaßen: $\mathbf{P}(|Z| > 1.96) = 0.05$ *für N(0,1)-verteiltes* Z.

(ii) Für Bin(n, p)-verteiltes X *mit nicht zu kleinem* npq *empfiehlt sich für ganzzahliges* k *die Normalapproximation* $\mathbf{P}(X \geq k) \approx \mathbf{P}\left(Z > (k - \frac{1}{2} - np)/\sqrt{npq}\right)$, *vgl. Buch S. 44.*

23. S a) Die Chebychev–Ungleichung besagt, dass für eine Zufallsvariable Y mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ gilt: $\mathbf{P}(|Y - \mu| \geq c\sigma) \leq \frac{1}{c^2}$.
Begründen Sie mit der Chebychev–Ungleichung: Für jedes $p \in [0, 1]$ gilt: Falls $X_1, X_2, \ldots$ eine Münzwurffolge zum Parameter p ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, p durch das Intervall $I := \left[\overline{X}_n - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{n}} \, , \quad \overline{X}_n + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{n}}\right]$ zu überdecken, nicht kleiner als 0.95. (Dabei ist $\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.)
(Man sagt dafür: I ist ein *Konfidenzintervall* für den Parameter p mit einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von mindestens 95%.)

b) Es sei Y eine $\mathrm{N}(p, pq/n)$-verteilte Zufallsvariable. Finden Sie ein möglichst kleines $\delta = \delta(n)$ so, dass die Wahrscheinlichkeit, die Zahl p durch das Intervall $J = [Y - \delta, Y + \delta]$ zu überdecken, (für jedes p) nicht kleiner ist als 0.95.

c) Für Fleißige (als Kür): Finden Sie per Simulationsexperiment für $n = 25$ und $p = 3/4$ die tatsächliche Überdeckungswahrscheinlichkeit des “approximativen 95%–Konfidenzintervalls” J , wenn anstelle von Y aus b) die Zufallsvariable $\bar{X}_n$ aus a) eingesetzt wird (oder umgekehrt gesagt, in a) mit der Normalapproximation gerechnet wird).

24. Z_1 und Z_2 seinen unabhängige $\mathrm{N}(0, 1)$-verteilte Zufallsvariable.
(i) $\vec{Z}$ sei der zufällige Vektor in $\mathbb{R}^2$ mit den Standardkoordinaten Z_1, Z_2, und $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ sei eine Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^2$. Begründen Sie, warum auch die $\vec{b}_1$-und die $\vec{b}_2$-Koordinate von $\vec{Z}$ zwei unabhängige $\mathrm{N}(0, 1)$-verteilte Zufallsvariable sind.
(ii) Sind die beiden Zufallsvariablen $Z_1 + Z_2$ und $Z_1 - Z_2$ unabhängig? Wie ist $Z_1 - Z_2$ verteilt?