Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Donnerstag, 1. Dezember 2011, zu Beginn der Vorlesung

17. S a) U sei uniform verteilt auf dem Intervall $[1, 10^6]$. Wir betrachten die Zufallsvariable $Y := \log_{10} U$. Berechnen Sie deren
(i) Verteilungsfunktion $G : y \mapsto \mathbf{P}(Y \leq y)$,
(ii) Dichte $g(y)dy$, $, 0 \leq y \leq 6$.
Welchen Wert hat die Dichtefunktion g an der Stelle $y = 6$?
b) Die Zufallsvariable X mit Wertebereich $[1, 10^6]$ habe die Dichte $\frac{1}{6 \ln 10} \frac{1}{x} \, dx$, $1 \leq x \leq 10^6$. Wir betrachten die Zufallsvariable $Y := \log_{10} X$. Berechnen Sie deren
(i) Verteilungsfunktion $G : y \mapsto \mathbf{P}(Y \leq y)$,
(ii) Dichte $g(y)dy$, $, 0 \leq y \leq 6$.
Welchen Wert hat die Dichtefunktion g an der Stelle $y = 6$?
c) Die Zufallsvariable X mit Wertebereich $[\ell, r]$ habe die Dichte $f(x)\, dx$, $\ell \leq x \leq r$. Die Abbildung $h : [\ell, r] \mapsto \mathbb{R}$ sei differenzierbar mit $h'(x) > 0$ für alle $x \in (\ell, r)$. Begründen Sie entlang des in b) aufgezeigten Weges, dass die Zufallsvariable $Y := h(X)$ die Dichte $g(y)dy$, $h(\ell) \leq y \leq h(r)$, hat, mit

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \frac{1}{h'(h^{-1}(y))}.$$

18 X_1 und X_2 seien unabhängig und uniform in $[0, 1]$ verteilt.
a) Berechnen Sie
(i) die Verteilungsfunktion
(ii) die Dichte
der Zufallsvariablen $X_1 + X_2$.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{|X_1 - X_2| > \frac{1}{2}\}$.
Hinweis: Das zufällige Paar (X_1, X_2) *ist so verteilt wie die Koordinaten eines auf dem Einheitsquadrat* $[0, 1]^2$ *uniform verteilten Punktes.*

19 S a) Berechnen Sie die Varianz einer uniform in $[0, 1]$ verteilten Zufallsvariablen.
b) Wie groß ist die Standardabweichung einer auf dem Intervall $[25, 35]$ uniform verteilten Zufallsvariablen?
c) Wie groß ist die Standardabweichung des (arithmetischen) Mittels $\bar{X}$ von 100 unabhängigen, auf $[25, 35]$ uniform verteilten Zufallsvariablen?
d) Es sei $\bar{X}$ wie in c). Finden Sie (unter Verwendung der Normalapproximation) eine Schranke c so, dass $\bar{X}$ mit Wahrscheinlichkeit ≈ 0.95 in das Intervall $[30 - c, 30 + c]$ fällt.

20 Z_1 und Z_2 seien unabhängig und N(0, 1)-verteilt. Berechnen Sie $\mathbf{P}(Z_1^2 + Z_2^2 \geq a)$. Finden Sie die Verteilung von $Z_1^2 + Z_2^2$ in Ihrem Repertoire?
Hinweis: Der Übergang zu Polarkoordinaten ergibt die Identität

$$\iint\limits_{\{(x,y):\sqrt{x^2+y^2} \geq c\}} e^{-(x^2+y^2)/2} \, dx \, dy = 2\pi \int_c^\infty e^{-r^2/2} r \, dr.$$