Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Donnerstag, 24. November 2011, zu Beginn der Vorlesung

13. S a) Es sei Z die Anzahl der Zyklen in einer rein zufälligen Permutation von $1, \dots, 1000$. Berechnen Sie den Erwartungswert von Z. (Hinweis: Die Konstruktion und das Ergebnis aus Aufgabe 5 (der ersten Aufgabe auf Blatt 2) ist hilfreich.)

b) Wir ziehen 40 mal rein zufällig mit Zurücklegen aus 1000 Individuen und sagen, dass der i-te Zug mit dem j-ten kollidiert (für $i \neq j$) falls in diesen beiden Zügen das selbe Individuum gezogen wird. Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Paare von kollidierenden Zügen.

c) Wir betrachten einen n-fachen p-Münzwurf. Es sei Y die Anzahl derjenigen geordneten Paare von Würfen, bei denen beide Würfe das Ergebnis 1 haben. Berechnen Sie den Erwartungswert von Y über eine Darstellung von Y als Summe von Indikatorvariablen, und beweisen Sie damit von neuem eine in der Vorlesung 4a hergeleitete Formel für $\mathbf{E}[X(X-1)]$, X Bin-(n,p)- verteilt.

14. Es sei (V, E) ein endlicher Graph, d. h. V (die Menge der *Knoten*) ist eine endliche Menge, und E (die Menge der *Kanten*) ist eine Teilmenge von $\{\{v, w\} : v, w \in V, v \neq w\}$. Es sei m die Gesamtanzahl der Kanten.
a) Wir färben jeden Knoten per fairem Münzwurf (also “unabhängig mit Wahrscheinlichkeit 1/2”) rot oder blau, und bezeichnen die zufällige Teilmenge bestehend aus den roten Knoten mit R. Was ist die erwartete Anzahl von Kanten, die R mit seinem Komplement verbinden?
b) (*Die probabilisitsche Methode.*) Zeigen Sie, dass eine Teilmenge von V existiert, die durch mindestens $m/2$ Kanten mit ihrem Komplement verbunden ist.

15. Sei $(X_1, \dots, X_r)$ multinomialverteilt zum Parameter $(n, p_1, \dots, p_r)$.
a) Begründen Sie ohne Rechnung: X_j ist Bin(n, p_j)-verteilt und $X_j + X_l$ ist Bin$(n, p_j + p_l)$-verteilt für $j \neq l$.
b) Berechnen Sie $\mathbf{Cov}[X_i, X_j]$ für $i \neq j$. (Teil a) ist hier hilfreich, wenn man nicht sehr gerne mit Multinomialkoeffizienten rechnet.)

16. S 30 Individuen tragen je eine Zahl, und zwar 15 Individuen die Zahl 1, 10 Individuen die Zahl 2 und 5 Individuen die Zahl 3. Es werden 10 Individuen rein zufällig (der Reihe nach ohne Zurücklegen) aus den 30 gezogen und die Zahlen $X_1, \dots, X_{10}$ notiert, die die Individuen tragen. Berechnen Sie (i) die Varianz von X_5, (ii) die Varianz von $X_1 + \ldots + X_{10}$, (iii) die Varianz von $\frac{1}{10}(X_1 + \ldots + X_{10})$.