Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Donnerstag, 17. November 2011, zu Beginn der Vorlesung

9. In einer Population aus $g = 50$ Individuen sind 30 vom Typ 0 und 20 vom Typ 1.
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p, dass beim 6-maligen Ziehen mit Zurücklegen keine Kollision entsteht (d.h. kein Individuum mehr als als einmal gezogen wird).
b) Wir betrachten folgenden Zufallsmechanismus: Es wird 6 mal mit Zurücklegen gezogen. Wenn dabei keine Kollision entsteht, wird das gezogene 6-Tupel ausgegeben. Andernfalls wird das Experiment unabhängig (mit “neuem Spiel und neuem Glück”) so lange wiederholt, bis keine Kollision entsteht, und das dann gezogene 6-Tupel ausgegeben. Sei M die ausgegebene Menge von Individuen. Begründen Sie, warum M eine rein zufällige 6-elementige Teilmenge der Population ist.
c) Sei T die Anzahl der gemäß b) zu ziehenden 6-tupel. Berechnen Sie den Erwartungswert von T.
d) Es sei X hypergeometrisch verteilt mit Parametern $6, 50, 20$ und Y binomialverteilt mit Parametern $6, 2/5$. Begründen Sie, warum für alle $k \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ gilt:

$$|\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(X = k)| \leq p,$$

wobei p die in a) berechnete Wahrscheinlichkeit ist.
(Hinweis: Sei B die Menge der Typ 1-Individuen in der Population. Dann gilt (warum?)

$$(i) \quad \mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(\#(M \cap B) = k) = \mathbf{P}(\#(M \cap B) = k \text{ und } T = 1) + \mathbf{P}(\#(M \cap B) = k \text{ und } T > 1)$$

$$(ii) \qquad \mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(\text{ genau } k \text{ Züge vom Typ 1})$$

$$= \mathbf{P}(\text{ genau } k \text{ Züge vom Typ 1 und keine Kollision bei den } n \text{ Zügen })$$

$$+\mathbf{P}(\text{ genau } k \text{ Züge vom Typ 1 und Kollision bei den } n \text{ Zügen })$$

10. 60 Karten, von denen 10 die Farbe blau, 20 die Farbe rot und 30 die Farbe grün haben, werden perfekt gemischt und dann eine nach der anderen aufgeschlagen.
(i) Wie wahrscheinlich ist es, dass die achte aufgeschlagene Karte blau ist?
(ii) Wie wahrscheinlich ist es, dass die achte und die neunte aufgeschlagene Karte nicht dieselbe Farbe haben?
(iii) Für jeden Farbwechsel (d.h. je zwei unmittelbar nacheinander aufgeschlagene Karten verschiedener Farbe) bekommen Sie einen Euro. Was ist Ihr erwarteter Gewinn?

11. S Aus einer Population bestehend aus 40 Frauen und 60 Männern wurde eine Stichprobe vom Umfang 20 (d.h. ein 20-elementige Teilmenge der Population) herausgegriffen. In dieser befanden sich 5 Frauen und 15 Männer.
a) Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Frauen in einer *rein zufälligen* Stichprobe vom Umfang 20?
b) Wie wahrscheinlich ist in einer rein zufällig gezogenen Stichprobe ein Anteil von Frauen, der vom (in a) berechneten) Erwartungswert mindestens so weit abweicht wie der beobachtete Anteil 5/20?

12. S In das Quadrat mit den Eckpunkten $(-n, n), (-n, -n), (n, -n), (n, n)$ werden à la Monte Carlo (vgl. Vorlesung 1a) n^2 uniform verteilte Punkte geworfen. Finden Sie für großes n eine Näherung für die Wahrscheinlichkeit, dass genau 5 davon in den Kreis mit Radius 1 um den Ursprung fallen.