Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Donnerstag, 11. November 2011, zu Beginn der Vorlesung

1. S a) Wir betrachten eine induktive Vorschrift zum Erzeugen zufälliger Permutationen über die Zyklenstruktur:

Die 1 bildet (erst einmal) einen einzigen Zyklus $1 \to 1$ (was sonst?)
Die 2 setzt sich mit Wahrscheinlichkeit 1/2 neben die 1 (d.h. es entsteht der Zyklus $1 \to 2 \to 1$) und setzt sich mit Wahrscheinlichkeit 1/2 allein (d.h. es entstehen die zwei Zyklen $1 \to 1$, $2 \to 2$.)
....
Die n setzt sich neben eines der $(n-1)$ schon vorhandenen Elemente (dadurch wird einer der schon vorhandenen Zyklen verlängert) oder setzt sich allein (dadurch entsteht der Zyklus $n \to n$), wobei jeder dieser n Ausgänge gleich wahrscheinlich ist.

Ist die so entstehende Permutation von $1, \dots, n$ rein zufällig? Begründen Sie Ihre Anwort!

b) Wie wahrscheinlich ist es, dass in einer rein zufälligen Permutation von $1, \dots, n$ die Elemente 2 und 5 nicht zum selben Zyklus gehören?

2. Wir betrachten zwei Populationen von Zellen. Anfangs (zum Zeitpunkt 0) besteht jede Population aus genau einer Zelle. In jedem Zeitschritt erhöht sich die Zahl der Zellen um eins, und zwar so, dass sich eine rein zufällig aus den vorhandenen Zellen gewählte Zelle in zwei Zellen aufspaltet. Es sei $1 + Z_{n,i}$ die Zahl der nach n Zeitschritten in Population i vorhandenen Zellen ($i = 1, 2$). Zeigen Sie, dass für jedes $n \geq 1$ das zufällige Paar $(Z_{n,1}, Z_{n,2})$ eine rein zufällige Besetzung von zwei Plätzen durch n Individuen ist.

3. Wie wahrscheinlich ist es, dass eine rein zufällige $\{+1, -1\}$ -Folge
(i) der Länge 100
(ii) der Länge 10000
in Summe 0 ergibt? Auf welches Ergebnis führt die Stirling-Approximation?

4. S 100 Punkte werden rein zufällig im Intervall $[0, 1]$ verteilt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

(i) 20 Punkte ins Intervall $[0, 0.2)$, 30 Punkte ins Intervall $[0.2, 0.5)$ und 50 Punkte ins Intervall $[0.5, 1]$ fallen;

(ii) mindestes 50 Punkte ins Intervall $[0, 0.2)$ fallen.