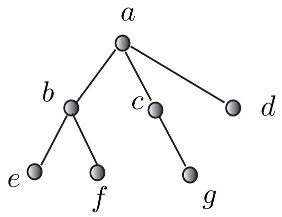
Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik"

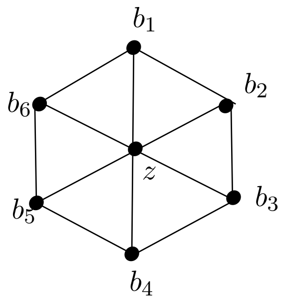
Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben: Donnerstag, 19. Januar 2011, zu Beginn der Vorlesung

37. Wir betrachten die einfache Irrfahrt auf dem rechts skizzierten Graphen: jeder Schritt führt mit gleicher Wahrscheinlichkeit (und unabhängig von der Vorgeschichte) zu einem der benachbarten Knoten.



(i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei Start in g der Zustand d vor dem Zustand e getroffen?
(ii) Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Schritte, die man bei Start in g benötigt, um die Menge $\{d, e\}$ (d.h. mindestes eines dieser Elemente) zu treffen?

38. S. $(X_0, X_1, ...)$ sei die einfache Irrfahrt auf dem rechts skizzierten Graphen.



a) Berechnen Sie
i) die erwartete Anzahl von Schritten bis zum Erreichen von z bei Start in b_1,
ii) die Wahrscheinlichkeit, bei Start in b_1 den Punkt z vor dem Punkt b_4 zu erreichen,
iii) die Gleichgewichtsverteilung.
b) Es bezeichne π die in a) berechnete Gleichgewichtsverteilung.
Finden Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}_{b_4}(X_0 = b_4, X_1 = z, X_2 = b_3, X_3 = b_2\}$ und $\mathbf{P}_{b_2}(X_0 = b_2, X_1 = b_3, X_2 = z, X_3 = b_4\}$, sowie $\mathbf{P}_{\pi}(X_0 = b_4, X_1 = z, X_2 = b_3, X_3 = b_2\}$ und $\mathbf{P}_{\pi}(X_0 = b_2, X_1 = b_3, X_2 = z, X_3 = b_4\}$.

39. S. Bei einem gewöhnlichen Würfel seien drei Seiten rot, zwei Seiten grün und eine Seite schwarz eingefärbt. Wie groß ist die erwartete Anzahl von Würfen, bis alle drei Farben mindestens einmal gefallen sind?

40. Wir betrachten eine "Nordost-Irrfahrt à la Pólya" auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: ausgehend von (w, b) ist die Wahrscheinlichkeit für einen Schritt nach $(w + 1, b)$ gleich $w/(w + b)$, und für einen Schritt nach $(w, b + 1)$ gleich $b/(w + b)$. Der Startpunkt sei $a = (1, 1)$.

a) Berechnen Sie die Verteilungsgsgewichte (i) von X_1 , (ii) von X_2.

b) Zeigen Sie mit Induktion: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Verteilung von X_n uniform auf $\{(1, n + 1), (2, n), \ldots , (n + 1, 1)\}$.

c) *(Für Fleißige und Wissbegierige, vgl. Buch Seite 94)* Überprüfen Sie: Alle Pfade $(a, a_1, \ldots , a_5)$ mit $a_5 = (4, 3)$ (davon gibt es übrigens $\binom{5}{2}$ Stück) haben dasselbe Verteilungsgewicht. (Als Konsequenz daraus hat $(X_0, \ldots , X_5)$ bedingt unter $\{X_5 = (4, 3)\}$ dieselbe Verteilung wie eine (einfache) Nordost-Irrfahrt $(Y_0, \ldots , Y_5)$ startend in $Y_0 = (1, 1)$ und bedingt unter $\{Y_5 = (4, 3)\}$.)

GESEGNETE WEIHNACHTEN UND EIN GLÜCKLICHES JAHR 2012!