Stochastik für die Informatik WiSe 2011/12

Klausur

Donnerstag, 9. Februar 2011, 14:15-15:45, H I

Name: Vorname:

Matrikelnummer: Studienrichtung:

Erreichte Punkte

1	2	3	4	5	6	KP	BP	GP

Tutorin/Tutor (bitte ankreuzen)

○ Christina Diehl ○ Matthias Gärtner ○ Philipp Klein
○ Noela Müller ○ Marija Piljic

Bei den Aufgaben 1 bis 4 können jeweils 16 Punkte erreicht werden, bei den Aufgaben 5 bis 6 jeweils 18 Punkte.
Bitte geben Sie kurze und treffende Begründungen für Ihre Ergebnisse.

1. Wir betrachten zwei Gruppen von Personen. Die Anzahl der Individuen in Gruppe 1 ist $g_1 = 50$, die in Gruppe 2 ist $g_2 = 200$. Das individuelle Körpergewicht in Gruppe 1 (gemessen in kg) hat die Standardabweichung $\sigma_1 = 3$, das in Gruppe 2 hat die Standardabweichung $\sigma_2 = 4$. Es bezeichne σ die Standardabweichung des Körpergewichtes eines aus der Vereinigung der beiden Gruppen rein zufällig herausgegriffen Individuums.

Wie groß ist σ, wenn

i) die beiden Gruppenmittelwerte μ_1 und μ_2 gleich sind,

ii) sich die beiden Gruppenmittelwerte um 20 kg unterscheiden?

2. Aus $3n$ (verschiedenen) Punkten werden n Dreiecke gebildet, so dass jeder Punkt genau einmal als Eckpunkt vorkommt. Jeder Punkt wird dann unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit p entfernt. Ein Dreieck *bleibt bestehen*, wenn keiner seiner Eckpunkt entfernt wird.

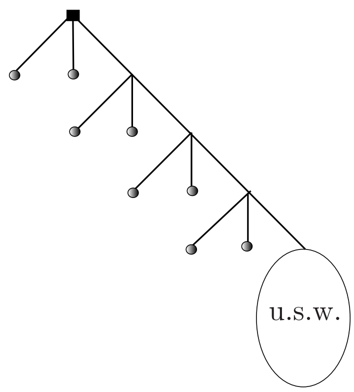
(i) Bestimmen Sie für $n = 4000$ und $p = 0.9$ den Erwartungswert der Anzahl der Dreiecke, die bestehen bleiben.

(ii) Mit (approximativ) welcher Wahrscheinlichkeit bleiben genau vier Dreiecke bestehen?

3. Im skizzierten Baum gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ genau zwei Blätter in der Tiefe k. Wir betrachten eine zufällige Wanderung startend in der Wurzel $\blacksquare$, wobei von jedem Knoten in Tiefe k, der kein Blatt ist, der nächste Schritt zu einem rein zufälligen Nachbarknoten in der Tiefe $k+1$ erfolgt. Sobald ein Blatt getroffen wird, endet die Wanderung.

Es sei X das zufällige Blatt, in dem die Wanderung endet, und Y die Tiefe von X. Mit $\rho(b)$ bezeichnen wir die Verteilungsgewichte von X und mit $\pi(k)$ die Verteilungsgewichte von Y.

Berechnen Sie $\mathbf{E}[\log_3 \rho(X)]$ und $\mathbf{E}[\log_3 \pi(Y)]$.



4. Wir betrachten zwei Münzwurfexperimente, eines mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p_1 und das zweite mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p_2. Im ersten gab es 120 Erfolge in 200 Versuchen, im zweiten 70 Erfolge in 100 Versuchen.

(i) Geben Sie einen Schätzer für $p_2 - p_1$ an. Welchen Wert hat er in unserem Beispiel?

(ii) Schätzen Sie die Standardabweichung dieses Schätzers.

(iii) Finden Sie ein approximatives 95%-Konfidenzintervall für $p_2 - p_1$.

(iv) Lässt sich die Hypothese "$p_1 = p_2$" aufgrund der angegebenen Beobachtung zum Signifikanzniveau 0.05 ablehnen?

5. Wir betrachten eine Folge von unabhängigen, auf dem Intervall $[0,1]$ uniform verteilten Zufallsvariablen $U_0, U_1, \dots$ und setzen $K := \sum_{i=1}^{10} I_{\{U_i \le U_0\}}$. Berechnen Sie

(i) $\mathbf{P}(K = 10)$
(ii) $\mathbf{P}(K = 10 | U_0 = u)$
(iii) $\mathbf{P}(U_0 \in du | K = 10)$
(iv) $\mathbf{E}[U_0 | K = 10]$

Hinweis zu (iii): Es gilt bekanntlich die Identität

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(U_0 \in du, K = 10) &= \mathbf{P}(U_0 \in du)\,\mathbf{P}(K = 10 | U_0 = u) \\ &= \mathbf{P}(K = 10)\,\mathbf{P}(U_0 \in du | K = 10).\end{aligned}$$

6. Wir betrachten eine gewöhnliche Irrfahrt auf dem skizzierten Graphen. Berechnen Sie

i) die Wahrscheinlichkeit, bei Start in a nach drei Schritten in g zu sein,
ii) die Wahrscheinlichkeit, bei Start in e nach drei Schritten in g zu sein,
iii) die erwartete Anzahl von Schritte bei Start in e bis zum Treffen von g,
iv) die Gleichgewichtsverteilung π auf $S := \{a, b, c, d, e, f, g\}$,
v) $\mathbf{P}_\pi(X_3 = e)$,
vi) $\mathbf{P}_\pi(X_0 = e | X_3 = g)$.