Vorlesung 9b

Bedingte Verteilungen
und
bedingte Wahrscheinlichkeiten

Voriges Mal:

Aufbau der gemeinsamen Verteilung von X_1 und X_2

aus der Verteilung ρ von X_1

und Übergangswahrscheinlichkeiten $P(a_1, .)$:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) := \rho(a_1)P(a_1, a_2)$$

Heute:

Zerlegung der gemeinsamen Verteilung von X_1 und X_2

in die Verteilung von X_1

und die *bedingte Verteilung* von X_2 gegeben X_1

Sei X_1 eine diskrete Zufallsvariable mit Zielbereich S_1

und X_2 eine Zufallsvariable mit Zielbereich S_2.

Dann ist die

bedingte Wahrscheinlichkeit von $\{X_2 \in A_2\}$*,*

gegeben $\{X_1 = a_1\}$

definiert als

$$\mathbf{P}(X_2 \in A_2 \,|\, X_1 = a_1) := \frac{\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 \in A_2)}{\mathbf{P}(X_1 = a_1)} \,.$$

Die Verteilung $\mathbf{P}(X_2 \in \cdot \,|\, X_1 = a_1)$

heißt die *bedingte Verteilung von* X_2, *gegeben* $\{X_1 = a_1\}$.

Definieren wir Übergangswahrscheinlichkeiten durch

$$\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2) := \mathbf{P}(X_2 \in A_2 \,|\, X_1 = a_1)$$

dann bekommen wir die

aus der vorigen Vorlesung vertraute Formel

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\,\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2).$$

Bei der Untersuchung von zwei Zufallsvariablen X_1, X_2

kann man immer

zu einer 2**-stufigen Betrachtungsweise** übergehen.

Man kann dabei wählen,

ob man X_1 in die erste Stufe aufnimmt oder in die zweite.

Beispiel:

Es seien Y und Z unabhängige $\mathbb{Z}$-wertige Zufallsvariable und

$X_1 := Y$, $X_2 := Y + Z$.

Wir haben gesehen:

Die bedingte Verteilung von $Y + Z$, gegeben $\{Y = a\}$,

ist die Verteilung von $a + Z$.

Was ergibt sich für die bedingte Verteilung von Y,

gegeben $\{Y + Z = b\}$?

“Wie war der erste Schritt?”

Die bedingte Verteilung von Y, gegeben $Y + Z = b$, ist

$$\mathbf{P}(Y = a \,|\, Y + Z = b) = \frac{\mathbf{P}(Y = a)\,\mathbf{P}(Z = b - a)}{\mathbf{P}(Y + Z = b)}\ .$$

Ein instruktiver Spezialfall:

Y und Z seien unabhängig und Geom(p)-verteilt. Dann ist

$$\mathbf{P}(Y = a)\,\mathbf{P}(Z = b - a) = q^{a-1} p\, q^{(b-a)-1} p = p^2 q^{b-2}\,.$$

Dieses hängt nicht von a ab.

Also ist die bedingte Verteilung

die uniforme auf $\{1, \ldots, b-1\}$

Das ist auch ohne Rechnung plausibel:

Gegeben, dass in einem p-Münzwurf

der zweite Erfolg beim b-ten Versuch kommt,

ist der Zeitpunkt des ersten Erfolges

uniform verteilt auf $\{1, \ldots, b-1\}$.

Bedingte Dichten.

Ist $f(a_1, a_2)\, da_1\, da_2$ gemeinsame Dichte von X_1 und X_2

und $f_1(a_1)\, da_1$ Dichte von X_1,

dann setzen wir

$$\mathbf{P}(X_2 \in da_2 \,|\, X_1 = a_1) := \frac{f(a_1, a_2)}{f_1(a_1)}\, da_2$$

und sprechen von der

bedingten Dichte von X_2, gegeben $\{X_1 = a_1\}$.

Beispiel: Exponentialverteilte Summanden

Y und Z seien unabhängig und Exp(1)-verteilt.

Was ist die bedingte Dichte von Y, gegeben $\{Y + Z = b\}$?

Die gemeinsame Dichte von Y und $Y + Z$ ist

$$e^{-y}e^{-(b-y)}\,dy\,db = e^{-b}\,dy\,db$$

Die Dichte von $Y + Z$ ist (man erinnere sich!) $\quad be^{-b}db$

$$\mathbf{P}(Y \in dy \,|\, Y + Z = b) = \frac{1}{be^{-b}}e^{-b}\,dy = \frac{1}{b}\,dy, \quad 0 \le y \le b.$$

Münzwurf mit zufälliger Erfolgswahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(U \in du, X_n = k) = du \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k}$$

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{\mathbf{P}(U \in du, X_n = k)}{\mathbf{P}(X_n = k)} = du \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} \Big/ \frac{1}{n+1}$$

$$\mathbf{P}(U \in du \,|\, X_n = k) = \tfrac{(n+1)!}{k!(n-k)!} u^k (1-u)^{n-k} \, du$$

Alte Regeln (für zweistufige Experimente) im neuen Gewand:

Formel für die totale Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbf{P}(X_2 \in A_2) = \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}\big(X_2 \in A_2 \mid X_1 = a_1\big)$$

Bedingter Erwartungswert von $h(X_1, X_2)$,

gegeben $\{X_1 = a_1\}$:

$$\mathbf{E}\big[h(X_1, X_2) \,|\, X_1 = a_1\big]$$
$$:= \sum_{a_2 \in S_2} h(a_1, a_2)\, \mathbf{P}\big(X_2 = a_2 \,|\, X_1 = a_1\big)$$

Bedingte Erwartung von $h(X_1, X_2)$, gegeben X_1:

$$\mathbf{E}\big[h(X_1, X_2) \,|\, X_1\big] := e(X_1),$$

mit

$$e(a_1) := \mathbf{E}\big[h(X_1, X_2) \mid X_1 = a_1\big].$$

Definition.

Seien E_1, E_2 Ereignisse. Dann ist die

bedingte Wahrscheinlichkeit von E_2, gegeben E_1,

definiert als

$$\mathbf{P}(E_2 \,|\, E_1) := \frac{\mathbf{P}(E_2 \cap E_1)}{\mathbf{P}(E_1)} = \mathrm{P}(I_{E_2} = 1 \,|\, I_{E_1} = 1)$$

...die Wahrscheinlichkeit von E_2, wenn man schon weiß, dass E_1 eingetreten ist.

Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung:

$$\mathbf{P}(T > k + l \,|\, T > k) = q^{k+l}/q^k = q^l \; .$$

Die Kenntnis, dass T einen Wert größer als k annimmt, ändert also die Verteilung für die “restliche Wartezeit” nicht.

Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung.

Für exponentialverteiltes T zum Parameter λ gilt für $r, s > 0$

$$\mathbf{P}(T > r + s \,|\, T > r) = e^{-\lambda s} \; .$$

Zweistufigkeit - Spieß umgedreht:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1 \,|\, X_2 = a_2) = \frac{\mathbf{P}(X_2{=}a_2 \,|\, X_1{=}a_1)\mathbf{P}(X_1{=}a_1)}{\mathbf{P}(X_2{=}a_2)}$$

Formel von Bayes

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1 \,|\, X_2 = a_2) = \frac{\mathbf{P}(X_2{=}a_2 \,|\, X_1{=}a_1)\mathbf{P}(X_1{=}a_1)}{\sum_{b \in S_1} \mathbf{P}(X_2{=}a_2 \,|\, X_1{=}b)\mathbf{P}(X_1{=}b)}$$

$$\mathbf{P}(E \,|\, E') = \frac{\mathbf{P}(E' \,|\, E)\mathbf{P}(E)}{\mathbf{P}(E' \,|\, E)\mathbf{P}(E) + \mathbf{P}(E' \,|\, E^c)\mathbf{P}(E^c)}$$

Beispiel: Reihenuntersuchungen:

Eine kranke Person wird in 100% der Fälle positiv getestet,

eine gesunde Person in 1%.

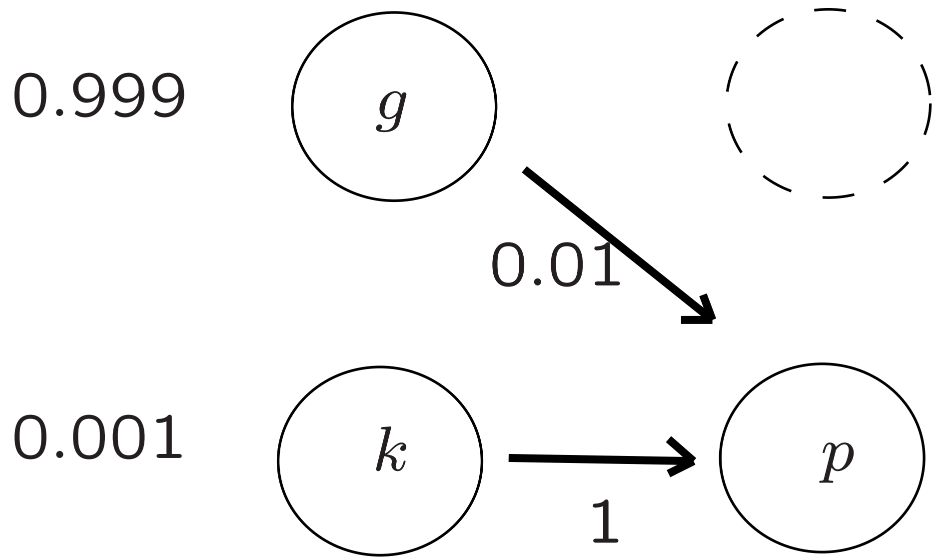
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv getestete Person wirklich krank ist?

Der Prozentsatz der kranken Personen sei 0.1% .

$$\mathbf{P}(E) = 0.001, \;\; \mathbf{P}(E' \,|\, E) = 1, \;\; \mathbf{P}(E' \,|\, E^c) = 0.01.$$

Bayes: $\mathbf{P}(E \,|\, E') = 0.091.$

Die Wahrscheinlichkeit, bei positivem Testbefund wirklich krank zu sein, liegt also bei nur 9%!



$$\frac{\mathbf{P}(X_1 = k, X_2 = p)}{\mathbf{P}(X_2 = p)} = \frac{0.001 \cdot 1}{0.999 \cdot 0.01 + 0.001 \cdot 1}$$

$$\approx \frac{1}{11}$$