Vorlesung 6a

Unabhängigkeit

Vorige Woche hatten wir schon die Definition der

Unabhängigkeit von zwei Zufallsvariablen :

Zufallsvariable X_1, X_2 heißen *(stochastisch)* *unabhängig*,

falls für alle Ereignisse $\{X_1 \in A_1\}$, $\{X_2 \in A_2\}$ gilt:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\,\mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

("Produktformel")

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\,\mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

anders geschrieben:

$$\mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_1}(X_1)\mathbf{1}_{A_2}(X_2)] = \mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_1}(X_1)]\mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_2}(X_2)]$$

Der Erwartungswert des Produktes

ist das Produkt der Erwartungswerte.

Die Indikatorvariablen $I_{\{X_1 \in A_1\}}$ und $I_{\{X_2 \in A_2\}}$

sind unkorreliert.

Wir werden gleich sehen, dass allgemeiner gilt:

Sind X_1, X_2 unabhängig,

dann sind reellwertige "Verarbeitungen"

$h_1(X_1)$, $h_2(X_2)$ unkorreliert.

Anders gesagt:

Der Erwartungwert des Produktes $h_1(X_1) \cdot h_2(X_2)$

ist das Produkt der Erwartungswerte.

Genauer:

Satz:

X_1, X_2 unabhängige ZV'e mit Zielbereichen S_1, S_2,

h_1, h_2 Abbildungen von S_1 bzw. S_2 in die reellen Zahlen.

Haben $h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$ endlichen Erwartungswert,

so folgt

$$\mathbf{E}\big[h_1(X_1)h_2(X_2)\big] = \mathbf{E}\big[h_1(X_1)\big]\,\mathbf{E}\big[h_2(X_2)\big] \,.$$

Insbesondere sind (im Fall endlicher Varianzen)

$h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$ unkorreliert.

Beweis für diskrete ZV'e:

$$\mathbf{E}\Big[h_1(X_1)h_2(X_2)\Big]$$

$$= \sum_{a_1,a_2} h_1(a_1)h_2(a_2)\,\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1,a_2} h_1(a_1)\mathbf{P}(X_1 = a_1)\,h_2(a_2)\mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1} h_1(a_1)\mathbf{P}(X_1 = a_1)\sum_{a_2} h_2(a_2)\mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$= \mathbf{E}\Big[h_1(X_1)\Big]\,\mathbf{E}\Big[h_2(X_2)\Big] \quad \Box$$

Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ mit Zielbereichen $S_1, \ldots, S_n$

heißen

(stochastisch) *unabhängig*, falls für alle Ereignisse $\{X_i \in A_i\}$

folgende Produktformel gilt:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \cdots \mathbf{P}(X_n \in A_n) .$$

Für diskrete Zufallsvariable ist die Unabhängigkeit

geichbedeutend mit der

Produktform der Verteilungsgewichte:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n) \;=\; \rho_1(a_1) \cdots \rho_n(a_n)$$

Die $\rho_i(a_i)$ sind dann die Verteilungsgewichte von X_i.

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariaben.

Definition:

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ sind unabhängig

$:\Longleftrightarrow$ für jedes n sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig.

Beispiele:

Fortgesetzter Münzwurf, fortgesetztes Würfeln

Ereignisse $E_1, \ldots, E_n$ heißen unabhängig

$:\Longleftrightarrow I_{E_1}, \ldots, I_{E_n}$ sind unabhängig.

Satz:

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\mathbf{P}(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = \mathbf{P}(E_{i_1}) \cdots \mathbf{P}(E_{i_k})$$

für beliebige $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

Ein eleganter Beweis findet sich im Buch auf Seite 67.

Fazit:

Die Unahängigkeit zweier Ereignisse E_1, E_2

ist äquivalent zur Produktformel

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1)\,\mathbf{P}(E_2)$$

Und die Unabhängigkeit dreier Ereignisse E_1, E_2, E_3 ist äquivalent dazu,

dass *beide* der folgenden Bedingungen a) und b) erfüllt sind:

$$\text{a)} \quad \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2),$$
$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_3),$$
$$\mathbf{P}(E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3).$$

$$\text{b)}\ \mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3)$$

a) oder b) allein reichen i.a. nicht für die Unabhängigkeit:

Beispiel:

Z_1, Z_2, Z_3 sei ein $\frac{1}{2}$-Münzwurf,

$E_1 := \{Z_1 = 1\}$, $E_2 := \{Z_2 = 1\}$,

$E_3 := \{Z_1 = Z_2\}$

E_1, E_2, E_3 sind paarweise unabhängig,

aber nicht unabhängig.

Gewisse Teilaspekte von abhängigen Zufallsvariablen

können unabhängig sein:

Beispiel:

(X, Y) seien rein zufällige “Zwei aus $\{1, 2, \ldots, 32\}$”.

Offenbar sind X und Y nicht unabhängig.

Aber: die Ereignisse

$E_1 := \{X$ ist durch 8 teilbar $\}$, $\quad E_2 := \{17 \le Y \le 24\}$.

sind unabhängig.

Denn

$$\mathbf{P}(E_1) = \frac{1}{8}\,, \mathbf{P}(E_2) = \frac{1}{4}\,, \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \frac{3\cdot 8+7}{32\cdot 31} = \frac{1}{32}.$$

Ein Beispiel für indirekte Abhängigkeiten:

(X,Y) sei ein p-Münzwurf, U sei uniform verteilt auf $\{0,1\}$,

X,Y,U seien unabhängig.

$$\mathbf{P}(X=U) = p\frac{1}{2} + q\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{analog:} \;\; \mathbf{P}(Y=U) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}(X=U, Y=U) = (p^2+q^2)\frac{1}{2}$$

$$p^2+q^2 = (p+q)^2 - 2pq = 1 - 2pq \geq \tfrac{1}{2},$$

mit "=" genau dann wenn $p = \frac{1}{2}$.

Für $p \neq \frac{1}{2}$ sind $I_{\{X=U\}}$ und $I_{\{Y=U\}}$ nicht unabhängig!

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen mit Dichten

Für Zufallsvariable mit Dichten

ist die Unabhängigkeit von X_1 und X_2

äquivalent zur Produktform der gemeinsamen Dichte:

$$f(a_1, a_2)\, da_1\, da_2 = f_1(a_1)\, da_1\, f_2(a_2)\, da_2$$

Beispiele:

1. Uniforme Verteilung auf dem Einheitsquadrat:

X_1, X_2 seien unabhängig und uniform verteilt auf $[0,1]$.

Dann hat (X_1, X_2) die Dichte

$$\mathbf{1}_{[0,1]}(a_1)\,da_1 \;\cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(a_2)\,da_2$$

$$= \mathbf{1}_{[0,1]\times[0,1]}(a_1, a_2)\;da_1\,da_2,$$

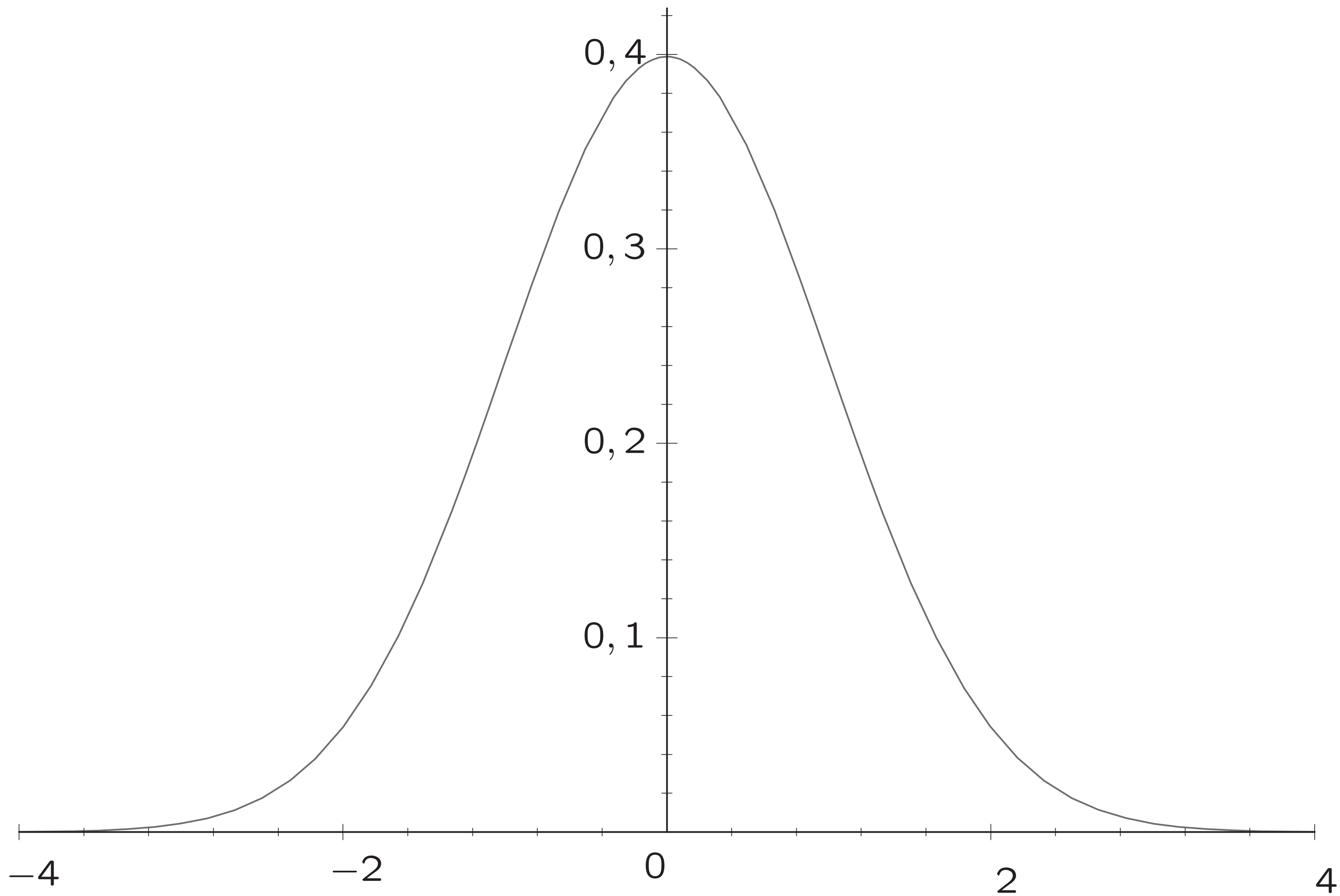
und ist somit uniform verteilt auf $[0,1] \times [0,1]$.

2. Standard-Normalverteilung:

Eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$\boxed{\varphi(a)\,da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-a^2/2}\,da}$$

heißt standard-normalverteilt.


0, 4
0, 3
0, 2
0, 1
−4
−2
0
2
4

Wichtige Beobachtung:

Z_1, Z_2 seien standard-normalverteilt und unabhängig.

(Z_1, Z_2) hat dann die Dichte

$$\varphi(a_1)\, da_1\, \varphi(a_2)\, da_2$$

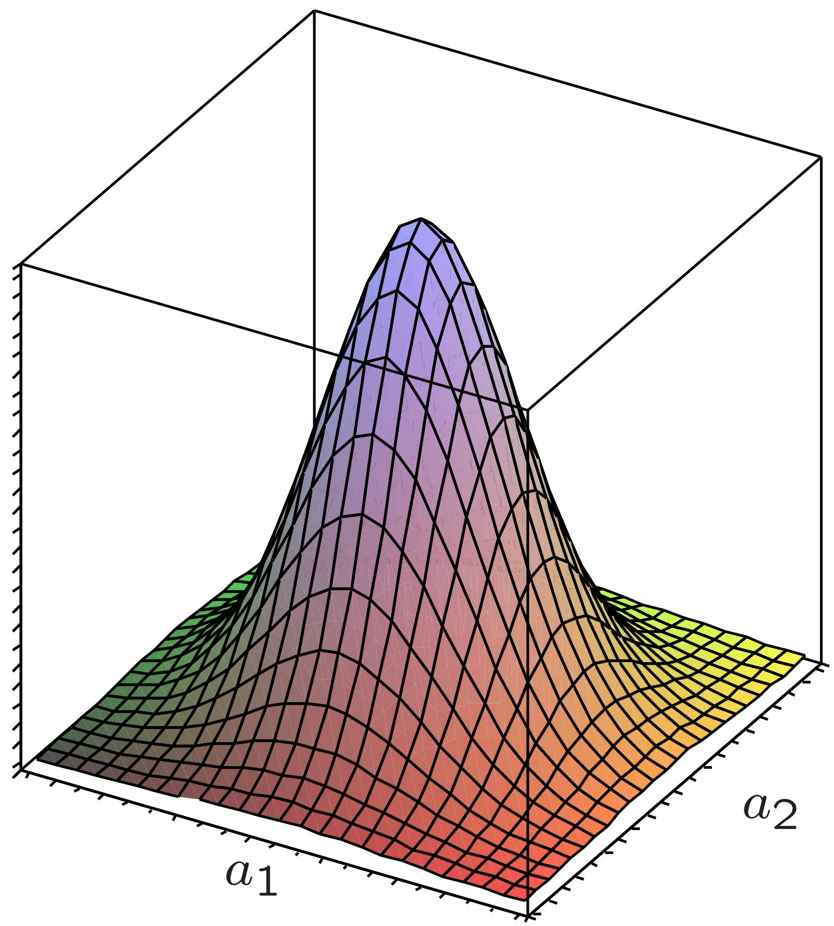
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_1^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a_2^2/2}\, da_1 da_2$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2}\, da, \quad a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Die Dichte ist rotationssymmetrtisch!

$$f(a_1, a_2) =$$

$$\frac{1}{2\pi} e^{-(a_1^2 + a_2^2)/2}$$



Definition:

Eine $\mathbb{R}^2$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$f(a)\,da = \frac{1}{2\pi} e^{-|a|^2/2}\,da, \quad a \in \mathbb{R}^2,$$

heißt standard-normalverteilt auf $\mathbb{R}^2$.

Fassen wir das zufällige Zahlenpaar $Z = (Z_1, Z_2)$ auf

als die (Standard-)Koordinaten

eines zufälligen Vektors

$\vec{Z}$ in $\mathbb{R}^2$,

dann folgt aus der Rotationsinvarianz der Verteilung von $\vec{Z}$:

Für jeden Einheitsvektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ ist die $\vec{u}$-Koordinate von $\vec{Z}$

standard-normalverteilt in $\mathbb{R}$.

Anders gesagt:

Sind Z_1, Z_2 unabhängig und N(0, 1)-verteilt,

dann gilt für jedes Zahlenpaar (τ_1, τ_2) mit $\tau_1^2 + \tau_2^2 = 1$:

$\tau_1 Z_1 + \tau_2 Z_2$ ist N(0, 1)-verteilt.

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen mit Dichten

Satz

$X_1, \ldots, X_n$ seien reellwertige Zufallsvariable.

Dann sind äquivalent:

(i) $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig,

und X_i hat die Dichte $f_i(a_i)\, da_i$, $\;i = 1, \ldots, n$.

(ii) $(X_1, \ldots, X_n)$ hat die Dichte

$$f_1(a_1) \cdots f_n(a_n)\, da_1 \ldots da_n$$

Beispiel: Multivariate Standard-Normalverteilung.

Sei $Z := (Z_1, \ldots, Z_n)$. Dann gilt:

$Z_1, \ldots, Z_n$ sind unabhängig und N(0, 1)-verteilt

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbf{P}(Z \in da) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\Big(-\frac{|a|^2}{2}\Big)\, da\,, \quad a \in \mathbb{R}^n\,,$$

mit $|a|^2 := a_1^2 + \cdots + a_n^2$.

Z heißt dann *standard-normalverteilt auf* $\mathbb{R}^n$.

Analog zum Fall $n = 2$ gilt:

Ist $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ standard-normalverteilt auf $\mathbb{R}^n$
und sind $\tau_1, \ldots, \tau_n$ reelle Zahlen mit $\tau_1^2 + \cdots + \tau_n^2 = 1$,
dann ist $Y := \tau_1 Z_1 + \cdots + \tau_n Z_n$ N$(0, 1)$-verteilt.

(Y ist die Koordinate von $\vec{Z} = Z_1\vec{e}_1 + \cdots + Z_n\vec{e}_n$
zum Einheitsvektor $\vec{u} := \tau_1\vec{e}_1 + \cdots + \tau_n\vec{e}_n$.)

Insbesondere ergibt sich:

$$\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{\sqrt{n}} \quad \text{ist N}(0,1)\text{-verteilt.}$$