Vorlesung 2a

Diskret uniform verteilte Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable X heißt *diskret uniform verteilt*,

wenn ihr Zielbereich S endlich ist und

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S} \quad \text{für alle } a \in S.$$

Damit beschreibt X eine rein zufällige Wahl

aus der (endlichen) Menge S.

Beispiel aus Vorlesung 1b:

$$S = \{1, 2, \ldots, r\}^n$$

$X :=$ rein zufällige $1, \ldots, r$ - Folge der Länge n.

Heute lernen wir drei weitere Beispiele kennen:

1. Rein zufällige Permutation
2. Rein zufällige k-elementige Teilmenge
3. Uniform verteilte Besetzung

Bei der Gelegenheit erarbeiten wir auch einige *Hilfen fürs Abzählen*.

1. Rein zufällge Permutation

Eine *Permutation* von $1, \dots, n$

ist eine bijektive Abbildung der Menge $\{1, \dots, n\}$ auf sich.

Z. B. mit $n = 7$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{array}$$

Wie wahrscheinlich ist es,

dass eine rein zufällige Permutation

genau **so** ausfällt?

Wieviele Permutationen von $1, \ldots, n$ gibt es?

n Möglichkeiten für das Bild von 1

mal $(n-1)$ Möglichkeiten für das Bild von 2

mal $(n-2)$ Möglichkeiten für das Bild von 3

$$\ldots$$

$$= n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 =: n!$$

Sei X eine rein zufällige Permutation von $1, \dots, n$,

d.h. eine Zufallsvariable, deren Zielbereich

$S :=$ die Menge aller Permutationen von $1, \dots, n$

ist, und die auf S uniform verteilt ist.

Für alle Elemente $a \in S$ gilt also:

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{n!}$$

Wie kommen rein zufällige Permutationen zustande?

Zum Beispiel: als Folge der gezogenen Nummern
beim n-maligen rein zufälligen Ziehen ohne Zurücklegen
aus $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Szenario: eine stets ideal durchmischte Urne
mit anfangs n Kugeln, beschriftet mit den Nummern $1, \ldots, n$.
Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen alle n Kugeln,
notiere die gezogenen Nummern in Reihenfolge

Eine rein zufällige Permutation ergibt sich auch

als n-tupel der Ränge der gezogenen Punkte

beim n-maligen rein zufälligen Ziehen aus $[0, 1]$

(dabei bekommt der kleinste Punkt den Rang 1,

der zweitkleinste den Rang 2,

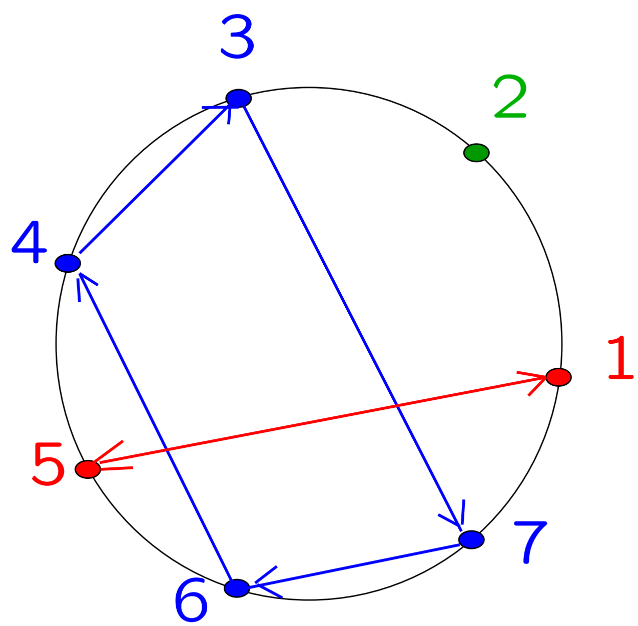
....

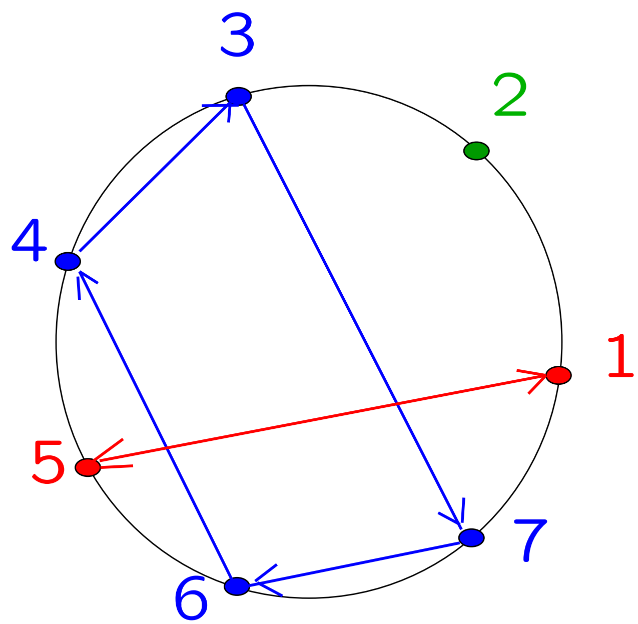
der größte den Rang n.)

Jede Permutation zerfällt in **Zyklen**

Beispiel:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{array}$$





Die Länge des Zyklus, der die Eins enthält, ist hier zwei.

Sei X eine rein zufällige Permutation von $1, \ldots, n$,

und b eine Zahl zwischen 1 und n.

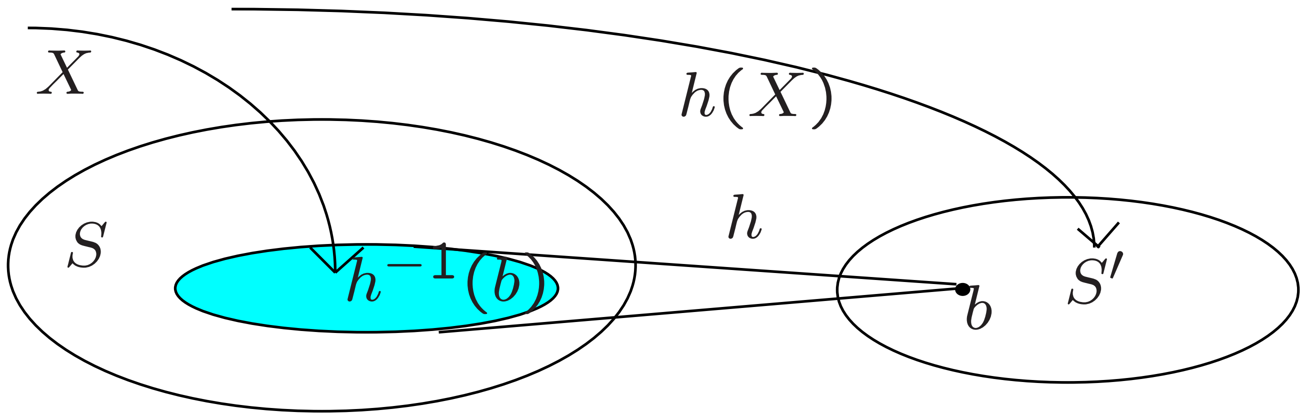
Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
" der Zyklus von X, der die Eins enthält, hat die Länge b ".

Für eine Permutation $a \in S$ bezeichne

$$h(a)$$

die Länge des Zyklus von a, der die Eins enthält.

$$\mathbf{P}(h(X) = b) = ?$$



$$S' = \{1, \ldots, n\}$$

Wieviele Permutationen $a \in S$ gibt es mit $h(a) = b$?

$$A := \{a \in S : h(a) = b\}$$

$$\#A = ?$$

$$A = \{a \in S : a(1) \neq 1, a^2(1) \neq 1, \ldots, \\ a^{b-1}(1) \neq 1, a^b(1) = 1\}$$

$$\#A = (n-1)(n-2)\cdots(n-b+1) \cdot 1 \cdot (n-b)\cdots 1$$

$$= (n-1)!$$

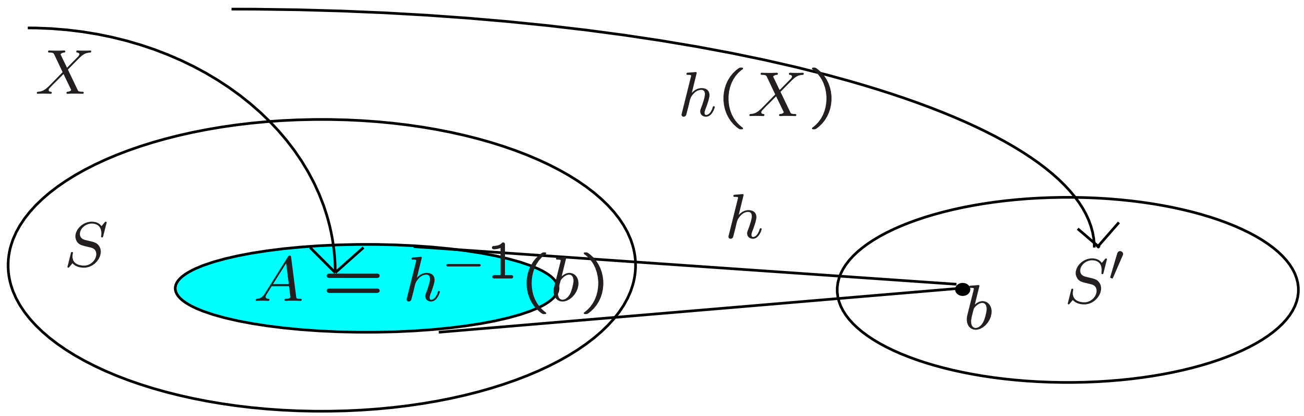
$$\#A = (n-1)!, \qquad \#S = n!$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{\#A}{\#S}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n!}$$

$$= \frac{1}{n}$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{1}{n}$$



$$S' = \{1, \ldots, n\}$$

$$A = \{a \in S : h(a) = b\}$$

$$\{X \in A\} = \{h(X) = b\}$$

$$\mathbf{P}(h(X) = b) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbf{P}(h(X) = b) = \frac{1}{n}, \quad b = 1, \ldots n.$$

Fazit:

Die Länge desjenigen Zyklus

einer rein zufälligen Permutation von $1, \ldots, n$,

der die Eins enthält,

ist uniform verteilt auf $\{1, \ldots, n\}$.

2. Rein zufällige Teilmenge einer festen Größe

Sei $0 \leq k \leq n$

und sei Y eine rein zufällige k-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$.

Wie wahrscheinlich ist das Ereignis $\{Y = \{1, \ldots, k\}\}$?

Der Zielbereich von Y ist

$$S := \{t : t \subset \{1, \ldots, n\}, \#t = k\} \ ,$$

die Menge der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$.

Wieviele k-elementige Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ gibt es?

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Denn:

Wird “nach der Reihe” ausgewählt, dann gibt es

$n(n-1)\cdots(n-k+1)$ mögliche Wahlprotokolle.

Auf die Reihenfolge kommt es nicht an,

also führen jeweils $k!$ dieser Wahlprotokolle

auf dieselbe k-elementige Teilmenge.

$$\#S = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

Binomialkoeffizient „ n über k “.

Fazit:

$$\mathbf{P}(Y = \{1, \ldots, k\}) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \,.$$

$\binom{n}{k}$ ... die Anzahl der Möglichkeiten für „ k aus n “

(k-elementige Teilmengen aus $\{1, 2, \ldots, n\}$,

k-köpfige Komitees aus n Leuten...)

Beispiel: Binomischer Lehrsatz:

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Die Potenz k gibt an, wie oft der Faktor x zum Zug kommt.

Pascal'sches Dreieck

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

.

.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Rekursion: $\binom{n+1}{k+1} = {\color{blue}\binom{n}{k+1}} + {\color{red}\binom{n}{k}}.$

Interpretation: Anzahl der Möglichkeiten, aus n Männern und einer Frau ein $k+1$ köpfiges Komitee auszuwählen.

Entweder die Frau ist nicht dabei... oder sie ist dabei...

Wie gewinnt man eine rein zufällige k-elementige Teilmenge

aus einer rein zufälligen Permutation?

Fakt ist (für $k \leq n$):

Ist $X = (X_1, \dots, X_n)$

eine rein zufälligen Permutation von $1, \dots, n$,

dann ist (für $k \leq n$) $\{X_1, \dots, X_k\}$

eine rein zufällige k-elementigen Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$

Anders gesagt:

Beim Ziehen ohne Zurücklegen

führen die ersten k Züge auf eine

rein zufällige Teilmenge des anfänglichen Reservoirs.

Noch eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer rein zufälligen k-elementigen Teilmenge:

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen aus einer Urne

mit k roten und $n - k$ blauen Kugeln.

Notiere die Nummern $X_1, \dots, X_k$ der Züge,

bei denen eine rote Kugel gezogen wird.

Dann ist $\{X_1, \dots, X_k\}$

eine rein zufällige k-elementige Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$.

Intermezzo:

Besetzungszahlen

Sei $a = (a_1, \ldots, a_n)$ eine Folge der Länge n in $\{1, \ldots, r\}$

Wie oft wird der Platz j durch a besetzt?

Für wieviele i ist $a_i = j$?

$$b_j(a) := \#\{i : a_i = j, 1 \leq i \leq n\}$$

Das r-tupel der Besetzungszahlen nennen wir kurz

“die Besetzung”.

In der Vorstellung des sukzessiven Setzens

von n Objekten auf r mögliche Plätze

gibt sie an, wieviele Objekte auf welchem Platz landen

(und unterscheidet nicht, welche Objekte das sind).

Machen wir uns ein Bild von der zufälligen Besetzung,

die aus einem auf $\{1, \dots, r\}^n$ uniform verteilten X entsteht.

Das war das Szenario aus Vorlesung 1b:

n Individuen werden rein zufällig (und “unabhängig”)

auf r mögliche Plätze gesetzt.

Siehe das R Programm “Besetzungszahlen” .

Wir sehen aus dieser Simulation:

Die Verteilung dieser zufälligen Besetzung ist
(bei weitem) nicht uniform.

Wir kommen auf diese Verteilung
in der nächsten Vorlesung zurück.

Zum Kontrast betrachten wir jetzt die

3. Uniform verteilte Besetzung

von r Plätzen mit n Objekten:

Der Zielbereich ist

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \ldots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \cdots + k_r = n\}$$

k ist das r-tupel der Besetzungszahlen, kurz: die Besetzung.

$$S_{n,r} := \{k = (k_1, \dots, k_r) : k_j \in \mathbb{N}_0,\ k_1 + \dots + k_r = n\}$$

$$\#S_{n,r} = ?$$

Fakt:

$$h(k_1, k_2, \dots, k_r) := \underbrace{1 \dots 1}_{k_1\text{-mal}}\, 0\, \underbrace{1 \dots 1}_{k_2\text{-mal}}\, 0 \dots 0\, \underbrace{1 \dots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

ist eine bijektive Abbildung von $S_{n,r}$ nach

$S :=$ Menge der 01-Folgen der Länge $n + r - 1$

mit genau n Einsen

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1 \ldots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \ldots 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

Beispiel: $n = 5$, $r = 4$:

$$(k_1, k_2, \ldots, k_4) = (2, 0, 3, 0)$$

$$h(2, 0, 3, 0) = 11001110$$

Der zweite und der vierte Block aus Einsen sind hier leer.

$$h(k_1, k_2, \ldots, k_r) := \underbrace{1 \ldots 1}_{k_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_2\text{-mal}} 0 \ldots 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{k_r\text{-mal}}$$

Die Länge des j-ten Blocks aus Einsen steht für die Anzahl der Objekte auf Platz j.

Die Blöcke aus Einsen sind durch Nullen getrennt. Die Nullen fungieren als “Trennwände” zwischen den r Plätzen, insgesamt gibt es $r - 1$ solche Trennwände.

$S :=$ Menge der 01-Folgen der Länge $n + r - 1$

mit genau n Einsen

$$\#S = ?$$

$$\#S = \binom{n + r - 1}{n}$$

Also (wegen der Bijektion) auch:

$$\#S_{n,r} = \binom{n + r - 1}{n}$$

Eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer uniform verteilten Besetzung:

Ziehe aus einer Urne mit n weißen und $r - 1$ schwarzen

Kugeln sukzessive ohne Zurücklegen.

Notiere 0 beim Zug einer schwarzen

und 1 beim Zug einer weißen Kugel.

Erzeuge so ein rein zufälliges Element aus S.

Übersetze dieses (mit der Umkehrung von h)

in eine rein zufällige Besetzung.