Vorlesung 13a

Quellencodieren und Entropie

S sei eine abzählbare Menge (ein “Alphabet”).

Die Elemente von S nennen wir *Buchstaben*.

Wir wollen die Buchstaben $a, b, \ldots$ durch

(möglichst kurze) 01-Folgen $k(a), k(b), \ldots$ codieren.

Dabei soll so etwas ausgeschlossen sein:

$$k(a) = 001,\ k(b) = 00101.$$

Definition:

Eine Abbildung

$$k : S \to \bigcup_{l \geq 1} \{0,1\}^l$$

heißt **(binärer) Präfixcode**,

wenn kein $k(a)$ Anfangsstück irgendeines $k(b)$, $a \neq b$, ist.

Ist $k(a) = k_1(a) \ldots k_l(a)$, dann nennt man

$$\ell(a) = l$$

die *Länge des Codeworts* $k(a)$

(oder auch *die Anzahl der Bits*).

Binäre Präfixcodes kann man mittels

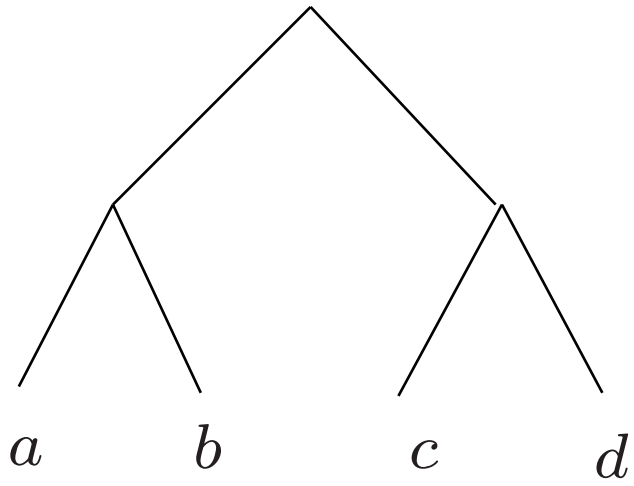
(verwurzelter, planarer) binärer Bäume darstellen:

die Blätter des Baumes werden bijektiv

mit den Buchstaben des Alphabets beschriftet.

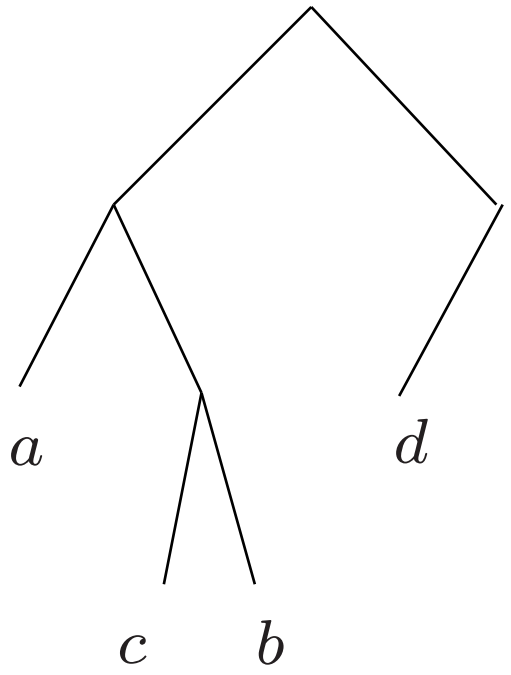
Beispiel: $S = \{a, b, c, d\}$

$$k(a) := 00, \quad k(b) := 01, \quad k(c) := 10, \quad k(d) := 11.$$



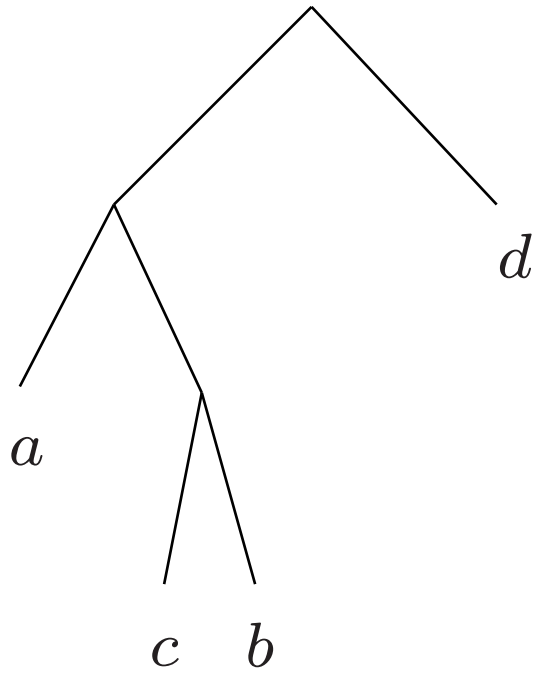
Beispiel: $S = \{a, b, c, d\}$

$$k(a) := 00, \quad k(b) := 011, \quad k(c) := 010, \quad k(d) := 10.$$



Beispiel: $S = \{a, b, c, d\}$

$$k(a) := 00, \quad k(b) := 011, \quad k(c) := 010, \quad k(d) := 1.$$



Merkmale eines solchen binären Baumes:

Ein Knoten ist ausgezeichnet als *Wurzel*.

Jeder Knoten (außer der Wurzel) hat genau einen Vorgänger.

Jeder Knoten hat zwei, einen oder keinen Nachfolger.

Die Knoten ohne Nachfolger heißen *Blätter*,
die mit Nachfolger heißen *innere Knoten*.

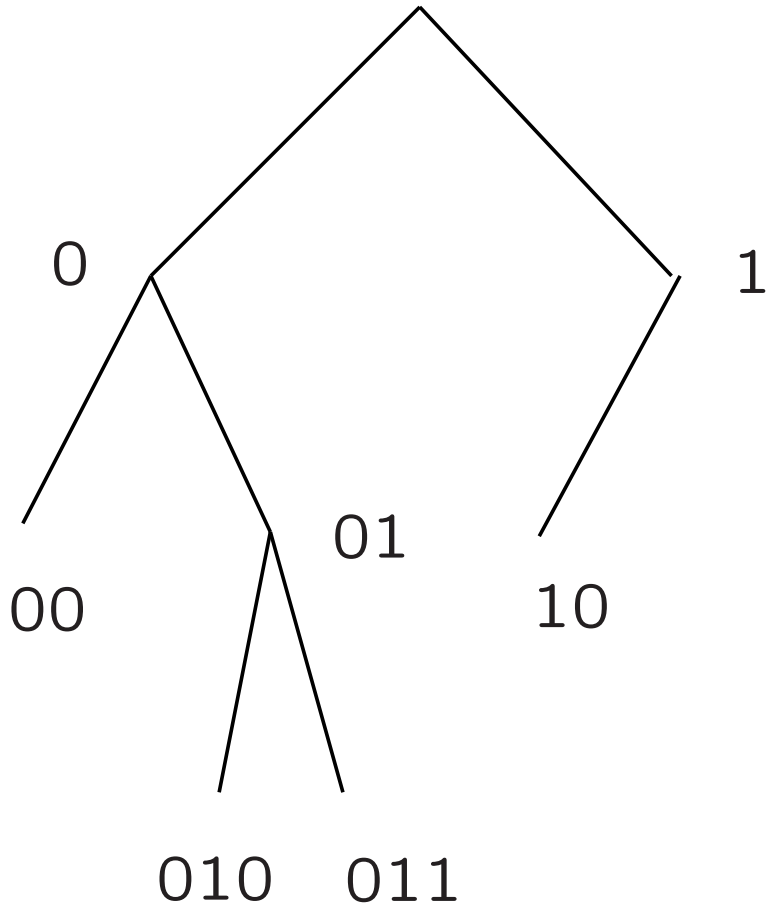
Regeln für die Beschriftung der Knoten mit 01-Wörtern:

Die Wurzel trägt das leere Wort.

Das Wort an einem Knoten (außer der Wurzel)
setzt das Wort am Vorgängerknoten um ein Bit fort
(die Wörter in der Tiefe l haben somit die Länge l).

Verschiedene Knoten tragen verschiedene Wörter.

Beispiel:



Die Fano-Kraft-Ungleichung (Teil 1)

Für jeden binären Präfixcode k gilt:

$$\sum_{a \in S} 2^{-\ell(a)} \leq 1 \, .$$

Beweis durch ein Gedankenexperiment:

Erzeuge per Münzwurf 01-Folgen und stoppe,

sobald eines der Codewörter vollendet ist.

Wegen der Präfixeigenschaft

schließen sich diese Ereignisse paarweise aus. Also gilt:

$$1 \geq \mathbf{P}(\text{man trifft schließlich auf ein Codewort})$$

$$= \sum_{a \in S} 2^{-\ell(a)}. \quad \square$$

Die Fano-Kraft-Ungleichung (Teil 2)

Ist $\ell : S \to \mathbb{N}$ eine Abbildung mit $\sum_{a \in S} 2^{-\ell(a)} \leq 1$,

dann gibt es einen binären Präfixcode,

für den $\ell(a)$ die Länge von $k(a)$ ist für alle $a \in S$.

Beweis: Wir ordnen die $a_1, a_2, \ldots$ so, dass

$$\ell(a_1) \leq \ell(a_2) \leq \cdots .$$

Angenommen $a_1, \ldots, a_m$ ist schon codiert,

aber a_{m+1} noch nicht. Dann ist $\sum_{i=1}^{m} 2^{-\ell(a_i)} < 1$, also

$$1 - \sum_{i=1}^{m} 2^{-\ell(a_i)} \geq 2^{-\ell(a_m)}.$$

Daraus folgt: Bei einem Münzwurf der Länge $\ell(a_m)$

wirft man mit W'keit $2^{-\ell(a_m)}$ ein Wort w,

das keines der $k(a_1), \ldots, k(a_m)$ als Anfangsstück enthält.

Falls $\ell(a_{m+1}) = \ell(a_m)$, setzt man $k(a_{m+1}) := w$,

falls $\ell(a_{m+1}) > \ell(a_m)$,

wählt man $k(a_{m+1})$ als passende Verlängerung von w.

So definiert man $k(a)$ induktiv für alle $a \in S$. $\square$

Die Ungleichung von Fano und Kraft
formuliert für binäre Bäume:

S sei eine abzählbare Menge
und $\ell(a),\ a \in S$, seien natürliche Zahlen.

Genau dann gibt es einen binären Baum, dessen Blätter
bijektiv mit den Elementen $a \in S$ beschriftet sind
und Tiefen $\ell(a)$ haben,

wenn $\displaystyle\sum_{a \in S} 2^{-\ell(a)} \leq 1$ gilt.

Sparsames Codieren zufälliger Buchstaben

Sei X ein “zufälliger Buchstabe” mit Verteilungsgewichten

$$\rho(a) = \mathbf{P}(X = a).$$

Gefragt ist nach einem binären Präfixcode,

dessen erwartete Codelänge

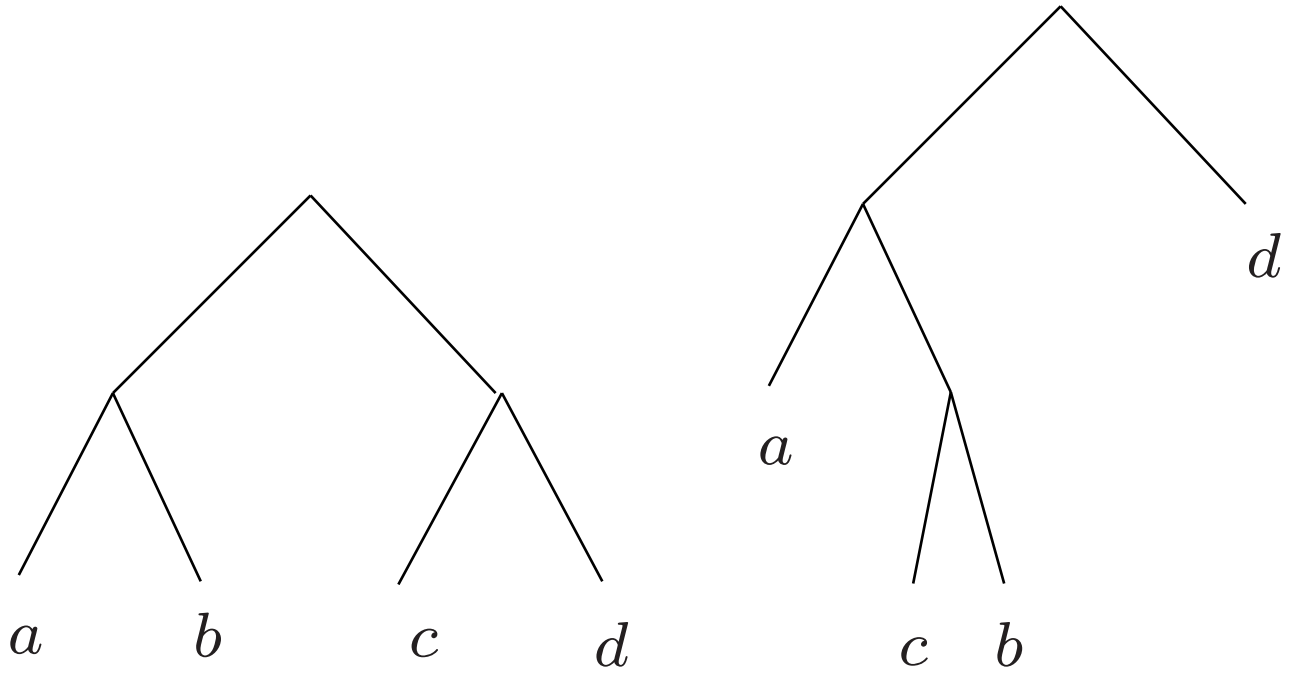
$$\mathbf{E}[\ell(X)] = \sum_{a \in S} \ell(a)\rho(a)$$

möglichst klein ist.

Beispiel: $S = \{a, b, c, d\}$.

Sind die vier Ausgänge gleich wahrscheinlich,

dann ist der Code links günstiger als der rechts.



Allgemeiner:

Gilt $\#S = 2^l$ mit $\rho(a) = 2^{-l},\ a \in S$,

dann ist es am besten, alle 2^l Buchstaben

mit den 01-Folgen der Länge l zu codieren.

In diesem Fall gilt

$\ell(a) = l = -\log_2 \rho(a)$ für alle $a \in S$.

Ein *Shannon-Code* ist ein Präfixcode,

bei dem jeder Buchstabe a mit einer 01-Folge codiert wird,

deren Länge $\ell(a)$ durch Aufrunden von $-\log_2 \rho(a)$

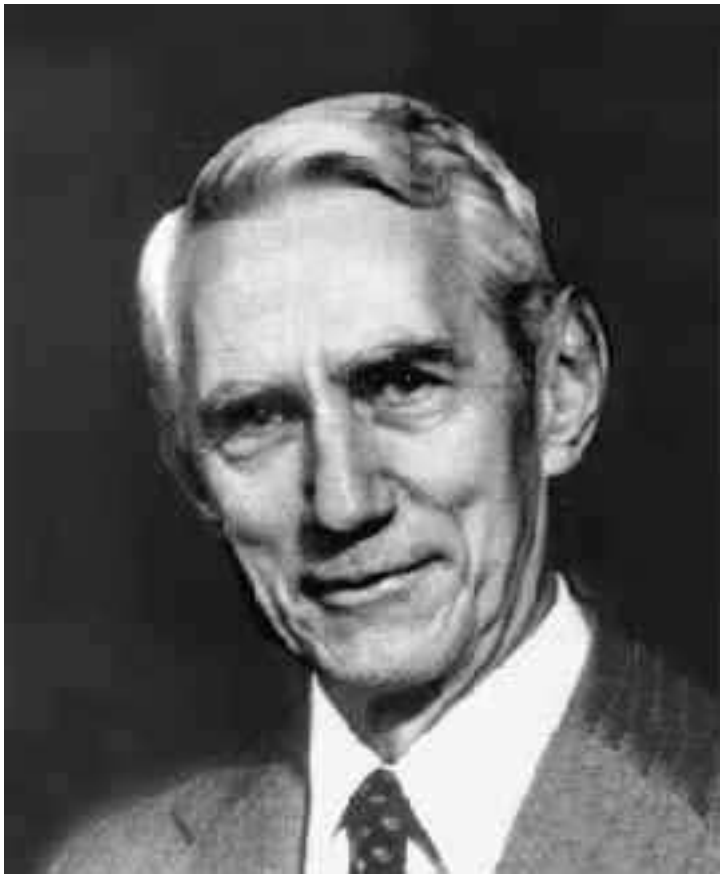
auf die nächste ganze Zahl entsteht, also

$$-\log_2 \rho(a) \leq \ell(a) < -\log_2 \rho(a) + 1 \ .$$

Solche Codes gibt es immer, denn es folgt

$$\sum_{a \in S} 2^{-\ell(a)} \leq \sum_{a \in S} \rho(a) = 1 \ ,$$

die Fano-Kraft Ungleichung ist also erfüllt.



Claude Shannon
1916 - 2001

Wir werden zeigen:

Shannon-Codes

verfehlen das Optimum der erwarteten Codelänge

um höchstens ein Bit.

Sei dazu

$$\mathbf{H}_2[X] := -\sum_{a \in S} \rho(a) \log_2 \rho(a),$$

mit $0 \log 0 := 0$.

Satz

(Quellencodierungssatz von Shannon)

a) Für jeden binären Präfixcode gilt

$$\mathbf{E}[\ell(X)] \geq \mathbf{H}_2[X].$$

b) Für binäre Shannon-Codes gilt außerdem

$$\mathbf{E}[\ell(X)] < \mathbf{H}_2[X] + 1.$$

Beweis:

Für Shannon-Codes gilt

$$\ell(a) < -\log_2 \rho(a) + 1$$

und folglich

$$\mathbf{E}[\ell(X)] < \sum_a \rho(a)(-\log_2 \rho(a) + 1) = \mathbf{H}_2[X] + 1.$$

Dies beweist erst einmal Teil b) des Satzes.

Jetzt zu Teil a):

Für beliebige Codes gilt

$$\mathbf{H}_2[X] - \mathbf{E}[\ell(X)] = \sum_{a:\rho(a)>0} \rho(a) \log_2 \frac{2^{-\ell(a)}}{\rho(a)} \,.$$

Nun ist die Logarithmusfunktion konkav

und liegt unterhalb ihrer Tangente im Punkt 1.

Folglich gilt $\log_2 x \le c \cdot (x-1)$ mit geeignetem $c > 0$, und

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_2[X] - \mathbf{E}[\ell(X)] &\le c \sum_{a:\rho(a)>0} \rho(a) \Big(\frac{2^{-\ell(a)}}{\rho(a)} - 1 \Big) \\ &\le c \cdot \Big(\sum_a 2^{-\ell(a)} - 1 \Big).\end{aligned}$$

Nach Fano-Kraft ist die rechte Seite ≤ 0, also

$$\mathbf{H}_2[X] - \mathbf{E}[\ell(X)] \le 0. \quad \square$$

Die im Quellencodierungssatz auftretende Größe

$$\mathbf{H}_2[X] := -\sum_{a \in S} \rho(a) \log_2 \rho(a)$$

heißt die **Entropie** von X (zur Basis 2).

Es ist sinnvoll, auch andere Basen zu erlauben.

Wir schreiben

$$\mathbf{H}[X] := -\sum_{a \in S} \rho(a) \log \rho(a),$$

wobei $\log$ zu einer beliebigen, festen Basis genommen wird:

$$\mathbf{H}_b[X] := -\sum_{a \in S} \rho(a) \log_b \rho(a).$$

Die Entropie ist *der* fundamentale Begriff
der Informationstheorie.
Nach dem Quellenkodierungssatz gibt die Entropie
fast genau die mittlere Anzahl von Ja-Nein Fragen an,
die notwendig und
- bei guter Wahl des Codes - auch hinreichend ist,
um den unbekannten Wert von X von jemandem zu erfragen,
der X beobachten kann.
Dies ist gemeint, wenn man die Entropie beschreibt als den
Grad von Unbestimmtheit oder Ungewissheit
über den Wert, den X annimmt.