Übungen zu „Stochastische Modelle der Populationsgenetik“

19. a) *Ein Münzwurf mit inhomogener Erfolgswahrscheinlichkeit.* $X_2, X_3, \ldots$ seien unabhängige, $\{0,1\}$-wertige Zufallsvariable mit $\mathbf{P}(X_k = 1) = 1/\binom{k}{2}$, $k = 2,3,\ldots$; das Ereignis $\{X_k = 1\}$ stehe für "Erfolg beim k-ten Versuch". Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass der allerletzte Erfolg beim ℓ-ten Versuch eintritt, ist $\frac{2}{\ell(\ell+1)}$, $\ell = 2,3,\ldots$. (Hinweis: In manchen unendlichen Produkten kürzen sich fast alle Faktoren ☺)

b) *Wie groß ist die Anzahl der Trauzeugen?* In Kingmans ∞-Coalescent betrachten wir ein festes Paar von Linien a, b . Es sei L die Anzahl von Linien, die im Spiel ist zu dem Zeitpunkt (genauer: "unmittelbar oberhalb des Zeitpunkts"), zu dem a und b verschmelzen. Warum ist $\mathbf{P}(L = \ell) = \frac{2}{\ell(\ell+1)}$, $\ell = 2,3,\ldots$?

c) *Eine Zerlegung der Exponentialverteilung.* $E_{\binom{k}{2}}$, seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\binom{k}{2}$, $k = 2,3,\ldots$. Wir setzen $S_k := E_{\binom{k}{2}} + E_{\binom{k+1}{2}} + E_{\binom{k+2}{2}} + \cdots$ und betrachten ein zweistufiges Experiment (L,T): die Zufallsvariable L habe die Verteilung $\mathbf{P}(L = \ell) = \frac{2}{\ell(\ell+1)}$, $\ell = 2,3,\ldots$, und gegeben $L = \ell$ sei T so verteilt wie S_ℓ. Begründen Sie im Licht von b), dass T standard-exponentialverteilt ist.

20. *Pólya und Kingman.* a) In einer Pólya-Urne mit anfänglich b Kugeln verschiedener Farben (nennen wir sie die Farben $1,\ldots,b$) ist die W'keit, dass sich nach $n-b$ Zugängen genau i Kugeln der Farbe 1 in der Urne befinden, gleich $\binom{n-i-1}{b-2}\Big/\binom{n-1}{b-1}$. Begründen Sie das. (Sie können dabei verwenden, dass unsere Pólya-Urne auf eine uniform verteilte Besetzung von f Plätzen mit $n-f$ Objekten führt, vgl. KW, Elementare Stochastik, Seite 89)

b) Prüfen Sie nach, dass sich die in a) gefundene Wahrscheinlichkeit umformen lässt zu $\frac{b-1}{i}\binom{n-b}{i-1}\Big/\binom{n-1}{i}$.

c) Wie können Sie das Ergebnis aus a) als eines über den Kingman-Coalescent lesen?

Noch zum Ergötzen und außer Konkurrenz: Fällt Ihnen (neben dem durch Aufgabe 20 mitgelieferten Argument) noch ein weiterer kombinatorischer Beweis für die folgende Zerlegung des Binomialkoeffizienten ein:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \cdots$$

Hinweis: Bei der Auswahl von k aus den Nummern $1,\ldots,n$ können Sie die kleinste ausgewählte Nummer notieren. Wieviele Möglichkeiten bleiben für die Auswahl der restlichen $k-1$, wenn die kleinste ausgewählte Nummer gleich m ist?