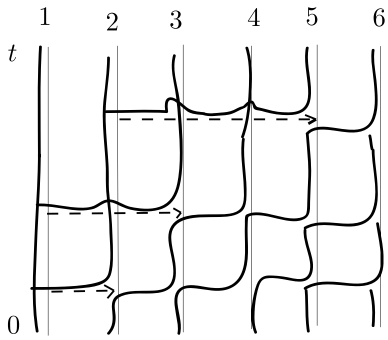
Übungen zu „Stochastische Modelle der Populationsgenetik“

12. *Was bleibt noch austauschbar im Lookdown-Modell?*

Anders als beim Moran-Modell kommen beim Lookdown-Modell die Poissonprozesse von Pfeilen von i nach j nur für jedes Paar von Nummern (i, j) mit $i < j$, dafür dann aber mit Rate 1. Bei jedem solchen Pfeil gebiert die Linie auf der Nummer i eine Linie auf der Nummer j; die Linien auf den Nummern $\geq j$ werden um Eins nach rechts verschoben und die Linie auf der Nummer N stirbt (siehe Skizze). Für festes t sei $\mathcal{P}$ die auf den Individuen zur Zeit t durch die Relation “gemeinsamer Ahne zur Zeit 0” erzeugte Partition. (In der Skizze ist $N = 6$, und $\mathcal{P}$ fällt als $\{\{1, 2, 3, 5\}, \{4\}, \{6\}\}$ aus.)



Finden Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

a) “die zur Zeit t auf den Nummern 1 und 2 befindlichen Linien haben einen gemeinsamen Ahnen zur Zeit 0”,

b) “die zur Zeit t auf den Nummern 5 und 6 befindlichen Linien haben einen gemeinsamen Ahnen zur Zeit 0”.

Wie kann man sehen, dass die zufällige Partition $\mathcal{P}$ Kingman(N, t)-verteilt ist?

13. *Münzwurf mit uniform verteilter Erfolgswahrscheinlichkeit.*

$U, U_1, U_2, \ldots$ seien unabhängig und uniform verteilt auf $[0, 1]$. Berechnen Sie

$$\mathbf{P}(U_1 < U), \quad \mathbf{P}(U_2 < U \mid U_1 < U), \quad \mathbf{P}(U_3 < U \mid U_1 < U, U_2 \geq U).$$

Sehen Sie einen Zusammenhang mit der Pólya-Urne? Und ein elegantes Argument dafür, dass in einer Pólya$(1, 1)$-Folge die ersten N Zugänge zu einer uniformen Besetzung der beiden Ahnen führen?

14. *Kingman und Pólya.*

$\mathcal{P}$ sei eine Kingman(N, t)-verteilte zufällige Partition. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehören 1 und 2 zur selben Klasse, gegeben dass $\mathcal{P}$ aus genau zwei Klassen besteht, für a) $N = 5$ b) $N = \infty$?

15. *Ein Quasigleichgewicht für den Moran-Anzahlprozess.*

(Z_t) sei eine Markovkette auf $\{0, 1, \ldots, N\}$ mit Sprungraten $\frac{1}{2}k(N - k)$ von k nach $k - 1$ und von k nach $k + 1$, und Absorption in 0 und N. (In der Generatormatrix Q steht also in der k-ten Zeile sowohl in der $(k - 1)$-ten Spalte als auch in der $(k + 1)$-ten Spalte der Eintrag $\frac{1}{2}k(N - k)$ und in der k-ten Spalte der Eintrag $-k(N - k)$.)

Z_0 sei uniform verteilt auf $\{1, \ldots, N - 1\}$. Berechnen Sie für jedes feste $t > 0$ die Verteilung ρ_t von Z_t aus der Vorwärtsgleichung $\dot{\rho} = \rho Q$. (*Hinweis: Versuchen Sie's mit dem Ansatz* $\rho_s(k) = ce^{-s}$, $k = 1, \ldots, N - 1$.)

Wie ist Z_t verteilt, gegeben das Ereignis $\{Z_t \in \{1, \ldots, N - 1\}\}$?

Was ist die Verteilung der zufälligen Zeit $\tau := \inf\{s > 0 : Z_s \in \{0, N\}\}$?