Übungen zu „Stochastische Modelle der Populationsgenetik“

5. In enem Moran-Modell zur Populationsgröße N sind zur Zeit Null k Individuen vom Typ A. Die Anzahl der Typ A-Individuen zur Zeit t sei Z_t. Zu dieser Zeit t zieht man (ohne Zurücklegen) eine Stichprobe der Größe n. Begründen Sie aus der graphischen Konstruktion des Modells die Identität

$$\mathbf{E}_k\left[\frac{Z_t(Z_t-1)\cdots(Z_t-n+1)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)}\right]=\mathbf{E}_n\left[\frac{k(k-1)\cdots(k-D_t+1)}{N(N-1)\cdots(N-D_t+1)}\right].$$

Dabei sei $D=(D_r)_{r\geq 0}$ der Anzahl-Prozess im Kingman-Coalescent.

6. Wir bauen eine Nachkommensverteilung im Cannings-Modell, jeweils für ein gerades $N\in\mathbb{N}$, wie folgt: Sei η Multinomial$(N,(\frac{1}{N},\dots,\frac{1}{N}))$ verteilt und $\nu=(\nu_1,\dots\nu_N)$ so, dass für ein rein zufällig ausgewähltes $I\in\{1,\dots,N\}$ die Komponente ν_I den Wert $N/2$ hat und die restlichen Komponenten Multinomial$(\frac{N}{2},(\frac{1}{N-1},\dots,\frac{1}{N-1}))$ verteilt sind. Die Zufallsvariable ξ komme so zustande, dass mit W'keit $1-1/N$ die Zufallsvariable η realisiert wird und mit W'keit $1/N$ die Zufallsvariable ν.

a) Begründen Sie, warum die Bedingung von Möhle und Sagitov verletzt ist, d.h. Dreifachkollisionen nicht asymptotisch vernachlässigbar sind gegenüber Zweifachkollisionen.

b) Diskutieren Sie (ohne formalen Beweis), gegen welchen Prozess die Folge der zeitreskalierten

(i) Anteilsprozesse

(ii) Stichprobengenealogien

für $N\to\infty$ konvergieren. (Mit “zeitreskaliert” ist hier gemeint: N Generationen pro Zeiteinheit.)

7. $X=(X_s)$ sei eine (Standard-) Wright-Fisher Diffusion, d.h. Lösung der stochastischen Differentialgleichung $dX=\sqrt{X(1-X)}\,dW$ mit Werten in $[0,1]$. Ferner bezeichne $D=(D_r)$ den Kingman'schen Anzahlprozess, also eine Markovkette auf $\mathbb{N}$ in kontinuierlicher Zeit mit Sprungraten $\binom{j}{2}$ von j nach $j-1$. In der Vorlesung hatten wir konzeptionell begründet, dass für jedes $x\in[0,1]$, $n\in\mathbb{N}$ und $t\geq 0$ die folgende Identität gilt:

$$(*)\quad \mathbf{E}_x[X_t^n]=\mathbf{E}_n[x^{D_t}].$$

Beweisen Sie jetzt $(*)$ mit Werkzeugen der stochastischen Analysis (Itô-Formel, Kolmogorov'sche Rückwärtsgleichung). Betrachten Sie für beide Seiten die Ableitung nach t. Wie Sie sehen werden, bringt dies die Möglichkeit der Induktion nach n auf den Plan. Wieso stimmt $(*)$ für $n=1$?