Übungen zu „Stochastische Modelle der Populationsgenetik“

Ausgabe: Mittwoch, 15. April 09

Das Motto des Blattes: Erwartete Absorptionszeiten. Oder: Wie lange dauert es in Erwartung bei einer neutralen Evolution, bis ein Allel der anfänglichen relativen Größe p in einer Population verschwindet oder fixiert ?

1. Sei N eine natürliche Zahl. $Y := (Y_m)_{m=0,1,\dots}$ sei die gewöhnliche Irrfahrt auf $\{0,1,\dots,N\}$ mit Absorption an den Randpunkten 0 und N. Berechnen Sie für $1 \leq i,j \leq N-1$

$$G(i,j) := \text{ die erwartete Anzahl der Besuche von } Y \text{ in } j \text{ bei Start in } i$$

Hinweis: $G(i,i) = 1/\mathbf{P}_i[Y \text{ kehrt nicht nach } i \text{ zurück}]$, $\quad i \mapsto G(i,j)$ ist affin linear auf $\{0,1,\dots,j\}$ und auf $\{j,j+1,\dots,N\}$ – warum?

2. Wie in der Vorlesung diskutiert, bekommt man einen Moran-Prozess Z^N zur Populationsgröße N, wenn man den zufälligen Pfad Y aus Aufgabe 1 in jedem Zustand i eine unabhängige $\mathrm{Exp}(i(N-i))$-lange Zeit halten lässt. Zeigen Sie: Für $p \in (0,1)$, $N \to \infty$ und $i/N \to p$ konvergiert die erwartete Absorptionszeit $\mathbf{E}_i[Z^N_{T_{\{0,N\}}}]$ gegen $-2(p\log p + (1-p)\log(1-p))$.

3. Wir betrachten einen Standard-Wienerpozess mit Start in $p \in (0,1)$ und Absorption in $\{0,1\}$, die Absorptionszeit sei mit T bezeichnet. Berechnen Sie $\mathbf{E}_p[\int_0^T \frac{1}{g(W_t)}dt]$ für $g(x) := x(1-x)$. Sehen Sie einen Zusammenhang mit Aufgabe 2?
Hinweis: Finden Sie eine Funktion $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $-\frac{1}{2}F'' = \frac{1}{g}$ auf $(0,1)$ und $F(0) = F(1) = 0$, und wenden Sie die Itô-Formel auf $F(W_T) - F(W_0)$ an.

4. Wie groß ist die erwartete Absorptionszeit einer Standard-Wright-Fisher Diffusion bei Start in der uniformen Verteilung auf $(0,1)$?