

Übungen zur Vorlesung „Stochastische Populationsmodelle“

Tutor: Stephan Gufler

Bearbeiten Sie wenigstens zwei der Aufgaben

und geben Sie Ihre Lösungen am 7. November in der Vorlesung oder bis zum 15. November direkt bei Herrn Gufler ab.

Die folgenden Aufgaben zum Thema Größenverzerrung sind übernommen aus dem Buchmanuskript Lyons, R. with Peres, Y. (2012), Probability on Trees and Networks, Cambridge University Press (In preparation) Aktuelle Version erhältlich auf <http://mypage.iu.edu/~rdlyons/>

9. Es seien X_n , $n = 1, 2, \dots$ nichtnegative ZV'e mit $0 < \mathbf{E}[X_n] < \infty$ und $\mathbf{P}(X_n > 0)/\mathbf{E}[X_n] \rightarrow 0$. Zeigen Sie, dass die größenverzerrten Zufallsvariablen $\hat{X}_n$ in Wahrscheinlichkeit gegen ∞ konvergieren.

10. Es sei X eine nichtnegative Zufallsvariable mit $0 < \mathbf{E}[X] < \infty$, und $\hat{X}$ eine Zufallsvariable, deren Verteilung die Größenverzerrte der Verteilung von X ist. Weiter sei U eine uniform auf $[0, 1]$ verteilte Zufallsvariable, die unabhängig von $\hat{X}$ ist. Zeigen Sie, dass $U \cdot \hat{X}$ und X genau dann dieselbe Verteilung haben, wenn X exponentialverteilt ist.

11. Für $k \geq 0$ seien $X, X_1, \dots, X_k$ u.i.v. nichtnegative Zufallsvariable mit $0 < \mathbf{E}[X] < \infty$. Weiter sei $\hat{X}$ eine davon unabhängige ZV'e, deren Verteilung die Größenverzerrte der Verteilung von X ist. Zeigen Sie:

$$\mathbf{E} \left[\frac{k+1}{\hat{X} + X_1 + \dots + X_k} \right] = \frac{1}{\mathbf{E}[X]}.$$