Übungen zur Vorlesung „Stochastische Populationsmodelle"

Tutor: Stephan Gufler

Bearbeiten Sie wenigstens zwei der Aufgaben bis Mittwoch, 31. Oktober 2012
und geben Sie Ihre Lösungen in der Vorlesung oder direkt bei Herrn Gufler ab

5. ***Unsterblich versus sterblich.***
Wir betrachten einen Galton-Watson-Baum T mit Poisson(α)-verteilter Kinderzahl und $\alpha > 1$.

(i) Wie lautet in diesem Fall die Fixpunktgleichung für die Aussterbewahrscheinlichkeit, q, umgeschrieben auf die Überlebenswahrscheinlichkeit $\bar{q} = 1 - q$?

(ii) Es seien $(p^*_d)_{d\geq 0}$ die Gewichte von Pois($\alpha\bar{q}$) bedingt unter $d \geq 1$, und $(\tilde{p}_\ell)_\ell \geq 0$ die Gewichte von Pois(αq). Geben Sie unter Verwendung dieser beiden Verteilungen eine dreistufige Konstruktionsvorschrift für T in drei Schritten an:

- erst den Baum der "unsterblichen Individuen" - dann die sterblichen Geschwister der Unsterblichen - dann deren sterbliche Nachkommensbäume.

(iii) Wie lauten die erzeugenden Funktionen von (p^*_d) und $(\tilde{p}_\ell)$? Machen Sie sich ein Bild!

6. ***Erzeugende Funktionen, Größenverzerren, Ausdünnen.***
Von einer zufälligen Anzahl L von Individuen wird per $(q, \bar{q})$-Münzwurf jedes entweder gelb oder blau gefärbt. Es sei L^*, die Anzahl der gelben und $\tilde{L}$ die Anzahl der blauen Individuen, und es bezeichne f_2 die erzeugende Funktion der Verteilung von $\tilde{L}$, gegeben $L^* = 2$. Begründen Sie:

$$f_2(s) = \frac{f''(qs)}{f''(q)}, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

7. ***Zahm oder wild?*** (Übernommen aus [LP]) [1] Es seien $X, X_1, X_2, \ldots$ nichtnegative, u.i.v. Zufallsvariable. Zeigen Sie:
(i) $\mathbf{E}[X] < \infty \iff \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} X_n = 0 \iff \sum_n e^{X_n} c^n < \infty \, \forall c \in (0,1)$
(ii) $\mathbf{E}[X] = \infty \iff \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} X_n = \infty \iff \sum_n e^{X_n} c^n = \infty \, \forall c \in (0,1)$

8. ***Größenverzerrung einer Summe.*** Es seien $N, X, X_1, X_2, \ldots$ unabhängige $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert. Die $X, X_1, \ldots$ seien überdies identisch verteilt. Zeigen Sie, dass die größenverzerrte Verteilung von $Z := \sum_{i=1^N} X_i$ dadurch entsteht, dass man

(i) N größenverzerrt

und

(ii) genau einen der Summanden X_i, $1 \leq i \leq \hat{N}$, größenverzerrt.

Betrachten Sie erst den Fall eines deterministischen N.

[1] Lyons, R. with Peres, Y. (2012), Probability on Trees and Networks, Cambridge University Press (In preparation) Aktuelle Version erhältlich auf `http://mypage.iu.edu/~rdlyons/`