Elementare Stochastik SoSe 2009

Probeklausur (außer Konkurrenz)

Dienstag, 26. Mai 2009, 10:15-11:45, HS III und HS IV

Name: Vorname:

Matrikelnummer: Studienrichtung:

Tutorin/Tutor (bitte ankreuzen)

○ Marie Cuno ○ Valentin Grigoroiu ○ Arne Harff ○ Ute Lenz

○ Sergej Spanier ○ Jonas Vogl ○ Benedikt Weygandt

Bei jeder der 8 Aufgaben können 10 Punkte erreicht werden.
Bitte geben Sie - wenn möglich - kurze Begründungen für Ihre Ergebnisse.

1. 10 Kugel werden "per zehnmaligem Würfeln" auf 100 Plätze verteilt. Genauer: Das 10-Tupel $(X_1, \dots, X_{10})$ der Platznummern der 10 Kugeln ist uniform verteilt auf $\{1, \dots, 100\}^{\{1,\dots,10\}}$. (Mehrfachbelegungen sind also erlaubt, und jeder Platz ist gleichberechtigt.)

a) Wie wahrscheinlich ist es, dass die erste und die zweite Kugel auf demselben Platz landen?

b) Was ist der Erwartungswert der Anzahl der Paare von Kugeln, die auf demselben Platz landen?

c) Was ist "mit Stirling & Taylor" eine Approximation für die Wahrscheinlichkeit, dass es zu keiner Kollision kommt? (Hier genügt die bloße Angabe des Ergebnisses.)

2. Ein in 0 startender p-q Irrfahrer auf $\mathbb{Z}$ setzt Schritte von $+1$ oder -1 nach Manier eines Münzwurfs aneinander: $+1$ hat W'keit p, -1 hat W'keit $q = 1-p$. Sei $p = 0.01$. Gefragt ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Wanderer nach 300 Schritten an der Stelle -298 landet. Geben Sie eine Näherung an.

3. Wie wahrscheinlich ist es, bei einem siebenmaligen (gewöhnlichen) Würfeln
a) insgesamt zweimal die Sechs und dazu auch noch alle anderen Augenzahlen zu bekommen
b) alle sechs Augenzahlen zu bekommen?

4. $X := (X_1, \cdots, X_{20})$ sei eine rein zufällige Permutation der Zahlen $1, \ldots, 20$. Für $i \in \{2, \ldots, 19\}$ sagen wir: X hat ein lokales Minimum bei i, falls $X_i = \min(X_{i-1}, X_i, X_{i+1})$.

(i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist X_2 das Kleinste von X_1, X_2 und X_3?

(ii) Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der lokalen Minima von X.

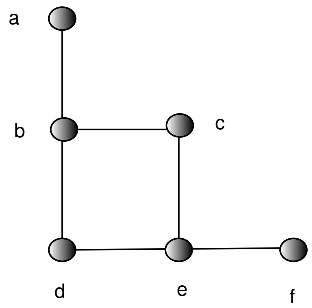
5. U sei uniform verteilt auf $[0,1]$. Wir betrachten die Zufallsvariable $X := 5\ \ln(1/U)$. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion und die Dichte von
(i) X
(ii) X^2.

6. Bei einem (gewöhnlichen, fairen) Würfel sind vier Seiten blau, eine Seite grün und eine Seite rot eingefärbt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man beim zweimaligen Würfeln zwei gleiche Farben?

b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Runs (der Maximalserien aufeinanderfolgender Würfe von gleicher Farbe) beim 20-maligen Würfeln. (Bei (b,g,g,b,r,g,g,g,b,b,g,g,b,r,g,g,g,b,b,b) z.B. gibt es 11 Runs.)

7. Ein Irrfahrer setzt den jeweils nächsten Schritt (ohne Ansehen der Vorgeschichte) zu einem rein zufällig gewählten Nachbarpunkt. (Von e aus geht er also im nächsten Schritt mit W'keit $1/3$ nach d, c oder f.) Er startet in d. Wie wahrscheinlich ist es, dass er nach a kommt, ohne vorher c zu treffen?



8. Eine Urne enthält 30 Kugeln. Jede Kugel ist mit einer Zahl (einem "Merkmal") beschriftet: 10 Kugeln tragen die Zahl 6, 10 Kugeln tragen die Zahl 7 und 10 Kugeln tragen die Zahl 8. Es werden rein zufällig ohne Zurücklegen 10 Kugeln gezogen. Berechnen Sie
a) die Varianz der ersten gezogenen Zahl
b) die Kovarianz der ersten und zweiten gezogenen Zahl
c) die Varianz der Summe der 10 gezogenen Zahlen.