Elementare Stochastik SoSe 2009

Klausur

Freitag, 17. Juli 2009, 10:15-11:45, HS III und HS V

Name: Vorname:

Matrikelnummer: Studienrichtung:

Erreichte Punkte

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Tutorin/Tutor (bitte ankreuzen)

○ Marie Cuno ○ Valentin Grigoroiu ○ Arne Harff ○ Ute Lenz
○ Sergej Spanier ○ Jonas Vogl ○ Benedikt Weygandt

Bei jeder der 8 Aufgaben können 10 Punkte erreicht werden.
Bitte geben Sie kurze und treffende Begründungen für Ihre Ergebnisse.

1. Ein in 0 startender Irrfahrer auf $\mathbf{Z}$ setzt seine Schritte der Größe ± 1 unabhängig und identisch verteilt, und zwar einen Schritt $+1$ mit Wahrscheinlichkeit 0.8. Es bezeichne X die Position des Irrfahrers nach 200 Schritten.
a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.
b) Finden Sie Zahlen c und d so, dass gilt: $\mathbf{P}(c \le X \le d) \approx 0.95$.

2. $X_1, X_2, \ldots$ seien unabhängig und uniform verteilt auf $[0,1]$. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $M_n := n \min(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Berechnen Sie für $c > 0$ den Grenzwert von $\mathbf{P}(M_n > c)$ für $n \to \infty$.

b) Welche der folgenden Aussagen (i)-(iv) trifft zu:
M_n ist für $n \to \infty$ asymptotisch (i) normalverteilt (ii) exponentialverteilt (iii) Poissonverteilt (iv) uniform verteilt?

3. E sei standard-exponentialverteilt, V sei uniform verteilt auf $\{+1, -1\}$ und unabhängig von E. Wir setzen $X := E \cdot V$.
a) $\mathbf{P}(|X| > c) =?$ $\qquad (c \geq 0)$
b) $\mathbf{P}(X > c) =?$ $\qquad (c \geq 0)$
c) Finden und skizzieren Sie die Dichte von X.
d) $\mathbf{Var}(X) =?$

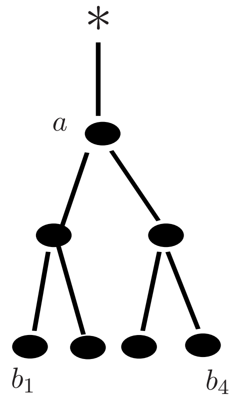
4. Z_1 und Z_2 seien Zufallsvariable mit Erwartungswert 0, Varianz 1 und Kovarianz 1/2. Es sei $X := 2Z_1 + 1, \quad Y := Z_1 - Z_2$. Für welche Gerade $g(x) = kx + d$ wird $\mathbf{E}[(Y - g(X))^2]$ minimal?

5. Eine Urne enthält 40 Kugeln. Jede Kugel ist mit einer Zahl beschriftet: 10 Kugeln tragen die Zahl 1, die anderen 30 Kugeln tragen die Zahl 0. Es werden rein zufällig ohne Zurücklegen 7 Kugeln gezogen; Z_i bezeichne die Zahl, mit der die i-te gezogene Kugel beschriftet ist. Finden Sie
a) die Varianz von Z_2,
b) die Kovarianz von Z_1 und Z_2,
c) die Varianz der Summe der 7 gezogenen Zahlen.

6. In einem fairen Münzwurf kommen K (Kopf) und W (Wappen) jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Muster KK vor dem Muster WKW kommt.

7. Wir betrachten einen Münzwurf, in dem "Kopf" mit Wahrscheinlichkeit p auftritt und "Wappen" mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$. Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl T der Würfe, die es braucht, bis sowohl Kopf als auch Wappen geworfen werden. (Zur Erläuterung: Kommt z.B. die Serie $WWWK$..., dann hat T den Ausgang 4; kommt KKW..., dann hat T den Ausgang 3.)

8. Wir betrachten eine gewöhnliche Irrfahrt X auf dem skizzierten Baum. Bei dieser erfolgt der nächste Schritt jeweils zu einem rein zufällig ausgewählten Nachbarknoten.



a) Es bezeichne $h(k)$ die Tiefe des Knotens k; z.B. ist $h(*) = 0$, $h(a) = 1$, $h(b_1) = 3$. Ist $h(X)$ eine Markovkette, und wenn ja, mit welcher Übergangsmatrix?

b) Wie wahrscheinlich ist es, bei Start im Knoten a, die Menge $\{b_1, \ldots, b_4\}$ der Blätter eher zu treffen als die Wurzel $*$?